

Sebastián Burgos, Godofredo Iommi y Renato Velozo Ruiz

Cálculo Real: Ejercicios resueltos

Prefacio

Este texto contiene soluciones a los problemas que aparecen en *Cálculo Real*. Los niveles de dificultad varían enormemente, los hay sencillos y rutinarios, pero también algunos particularmente difíciles. Esperamos que los lectores intenten resolver los ejercicios y, solo una vez que lo hayan hecho, consulten las soluciones.

Parte de este texto fue escrito entre 2014 y 2017, periodo en el cual S.B. y R.V.R. fueron estudiantes de la Facultad de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile. S.B. y R.V.R. quisieran agradecer a sus profesores de Cálculo durante ese periodo por transmitir su entusiasmo y conocimiento. En particular a José Alberto Montero, Duvan Henao, y Godofredo Iommi.

Parte de este trabajo fue financiado por los proyectos FONDECYT no. 1150058 no. 1190194. no. 1230100.

*Sebastián Burgos
Godofredo Iommi
Renato Velozo Ruiz*

Índice general

1. Números Reales	1
Referencias	39
2. Funciones Reales	41
Referencias	65
3. La Derivada	67
Referencias	100
4. La Integral de Riemann	101
Referencias	148

Capítulo 1

Números Reales

Algunos de los siguientes ejercicios aparecen en los textos de Bressoud [3], Hardy [11], Lima [14] y Pólya y Szegő [13].

1. Demuestre que el ínfimo del conjunto

$$A := \left\{ \frac{|\cos n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

es igual a cero.

Solución. Como $n > 0$ y $|\cos n| \geq 0$ tenemos que cero es cota inferior de A . Además, en virtud de la propiedad Arquimediana, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n > 1$ suficientemente grande tal que $0 \leq \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. De donde se obtiene el resultado.

2. Sea $a \in (0, 1)$. Demuestre que el ínfimo del conjunto

$$A := \{a^n : n \in \mathbb{N}\},$$

es igual a cero.

Solución. Como $a > 0$ se tiene que cero es cota inferior de A . Por definición debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} < \varepsilon$. En lugar de eso, probaremos, equivalentemente, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a^{n_0}}$. Sea $x > 0$ tal que $\frac{1}{a} = x + 1$. Usamos aquí que $a \in (0, 1)$. Por la desigualdad de Bernoulli obtenemos $a^{-n} = (x+1)^n \geq 1 + nx$. Por tanto la sucesión $(1/a^n)_n$ no es acotada superiormente de donde se obtiene el resultado.

3. Determine el ínfimo y el supremo del conjunto

$$A := \left\{ \frac{mn}{1+m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Solución. Vamos a probar que $\inf A = \frac{1}{3}$. Notemos que si $m = n = 1$ entonces $\frac{mn}{1+m+n} = \frac{1}{3}$. La expresión que define el conjunto A , vista como sucesión, es creciente tanto en m como en n . Dado que la expresión $\frac{mn}{1+m+n}$ es simétrica en m y n , basta probar esta afirmación en términos de m . En efecto, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(2+m+n)m < (m+1)(1+m+n) \quad \Rightarrow \quad \frac{mn}{1+m+n} < \frac{(m+1)n}{1+(m+1)+n}.$$

Por lo tanto el ínfimo de A se alcanza cuando $m = n = 1$. Por otra parte, vamos a probar que $\sup A = +\infty$, en el sentido de que A no es acotado superiormente. Considerando $m = n$, obtenemos $\frac{mn}{1+m+n} = \frac{m^2}{1+2m}$. Como $\frac{m^2}{1+2m} \geq \frac{m}{3}$, el resultado se obtiene notando que la sucesión $(m/3)_m$ no es acotada superiormente.

4. Determine el ínfimo y el supremo del conjunto

$$A := \left\{ \frac{m}{|m|+n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Solución. Primero, notamos que el conjunto A está acotado inferiormente por $x = -1$ y superiormente por $x = 1$. En efecto, para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\frac{|m|}{|m|+n} < 1$. A continuación probaremos que $\inf A = -1$. Sean $\varepsilon > 0$ y fijemos $n = 1$. Por la propiedad Arquimediana existe $m \in \mathbb{Z}$ negativo tal que $\frac{1}{|m|+1} \leq \varepsilon$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$1 + \frac{m}{|m|+1} = \frac{1+m+|m|}{|m|+1} = \frac{1}{|m|+1} < \varepsilon.$$

Es decir, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $-1 < \frac{m}{|m|+1} < -1 + \varepsilon$. Por lo tanto $\inf A = -1$. Por otra parte, probaremos que $\sup A = 1$. Para esto fijamos nuevamente $n = 1$. Por la propiedad Arquimediana existe $m \in \mathbb{Z}$ positivo tal que

$$1 - \frac{m}{|m|+1} = \frac{1}{|m|+1} \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $1 - \varepsilon < \frac{m}{|m|+1} < 1$. Por tanto $\sup A = 1$.

5. Determine el ínfimo y el supremo del conjunto

$$A := \left\{ \frac{mn}{4m^2+n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Solución. Primero probamos que $\inf A = 0$. Para esto fijamos $n = 1$, y notamos que $\frac{m}{4m^2+1} < \frac{1}{4m} < \frac{1}{m}$. Luego, por la propiedad Arquimediana existe $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$ de donde concluimos. Finalmente probamos que $\sup A = \frac{1}{4}$. Por la desigualdad aritmética-geométrica, $\frac{mn}{4m^2+n^2} \leq \frac{1}{4}$. Y además la igualdad se alcanza cuando $4m^2 = n^2$, es decir, cuando $2m = n$. Por último basta considerar $n = 2$ y $m = 1$ para probar el resultado.

6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos subconjuntos no vacíos y acotados de números positivos. Definimos el conjunto

$$AB := \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Demuestre que AB es un conjunto acotado y determine el supremo de AB .

Solución. Como A y B son conjuntos no vacíos y acotados, ambos poseen un supremo. Por ende, para todo $x \in A$ e $y \in B$ se tiene $0 \leq xy \leq \sup A \cdot \sup B$. En particular, el conjunto AB es acotado. Probaremos ahora que $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$. Sea $c \in \mathbb{R}^+$ una cota superior del conjunto AB . Fijando $y \in B$ se tiene que

$$xy \leq c \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{c}{y} \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \frac{c}{y} \quad \Rightarrow \quad y \leq \frac{c}{\sup A},$$

donde hemos usado que $y > 0$, la definición de $\sup A$, y que $\sup A \neq 0$. Y como $y \in B$ es un elemento arbitrario, se tiene que

$$y \leq \frac{c}{\sup A} \quad \Rightarrow \quad \sup B \leq \frac{c}{\sup A} \quad \Rightarrow \quad \sup A \cdot \sup B \leq c,$$

donde hemos usado la definición de $\sup B$. Por tanto, se obtiene el resultado.

La siguiente es otra forma de probar que $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \sup A - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}, \quad 0 < \sup B - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}, \quad (1.1)$$

donde estamos usando que $\sup A + \sup B > 0$. De la definición de supremo existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B} < x \leq \sup A, \quad \sup B - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B} < y \leq \sup B, \quad (1.2)$$

donde usamos que $\sup A + \sup B > 0$. Multiplicando estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B} \right) \left(\sup B - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B} \right) \\ &= \sup A \sup B - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B} (\sup A + \sup B) + \frac{\varepsilon^2}{(\sup A + \sup B)^2} \leq xy \leq \sup A \sup B. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sup A \sup B - \varepsilon < xy \leq \sup A \sup B. \quad (1.3)$$

Así $\sup AB = \sup A \sup B$.

Nota: Hemos probado la afirmación (1.3) para todo $\varepsilon > 0$ que satisface (1.1). Sin embargo, si consideramos $\varepsilon' > 0$ tal que no se cumple (1.1) existe $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ que satisface (1.1). Basta entonces, probar el resultado bajo la hipótesis (1.1).

7. Dadas dos funciones $f, g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ acotadas, demuestre que el producto $f \cdot g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada. Suponiendo además que ambas son funciones no negativas, demuestre que

$$\sup(f \cdot g) \leq \sup f \sup g \quad \text{y} \quad \inf(f \cdot g) \geq \inf f \inf g.$$

Solución. Como las funciones f y g son acotadas, existen $M, N \in \mathbb{R}^+$ tales que para todo $x \in [0, 1]$ se tiene $|f(x)| < M$ y $|g(x)| < N$. Multiplicando estas desigualdades obtenemos que $|(f \cdot g)(x)| = |f(x)g(x)| < MN$ para todo $x \in [0, 1]$. Es decir, $(f \cdot g)(x)$ es una función acotada.

Además, si f y g son no negativas, tenemos que

$$0 \leq \inf f \leq f(x) \leq \sup f, \quad 0 \leq \inf g \leq g(x) \leq \sup g.$$

Multiplicando estas desigualdades obtenemos que

$$0 \leq \inf g \cdot \inf f \leq g(x)f(x) \leq \sup f \cdot \sup g.$$

Por ende $\inf g \cdot \inf f$ y $\sup g \cdot \sup f$ son cotas inferior y superior de $(f \cdot g)$, respectivamente. El resultado se obtiene por definición.

El siguiente ejemplo muestra que la no negatividad de las funciones es necesaria para el resultado. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2$. Como la función es una traslación, es fácil ver que $f([0, 1]) = [-2, -1]$. Además $(f \cdot f)([0, 1]) = [1, 4]$. Sin embargo se tiene

$$4 = \sup(f \cdot f) \geq (\sup f)^2 = 1 \quad \text{y} \quad 4 = (\inf f)^2 \geq \inf(f \cdot f) = 1.$$

8. Sea f una función positiva y acotada superiormente demuestre que

$$\sup(f^2) = (\sup f)^2.$$

Solución. Como f es una función acotada y positiva se tiene que $\sup f \geq f(x)$ y por tanto $(\sup f)^2 \geq f(x)^2$. Hemos usado aquí que la función $x \mapsto x^2$ es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. Así, $(\sup f)^2$ es cota superior de f^2 . Además, si $c \in [0, +\infty)$ es cota superior de f^2 entonces para todo x se tiene que

$$c \geq f(x)^2 \Rightarrow \sqrt{c} \geq f(x) \Rightarrow \sqrt{c} \geq \sup f \Rightarrow c \geq (\sup f)^2.$$

De donde se tiene el resultado.

9. De un ejemplo de una función acotada que no alcanza su supremo.

Solución. Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Por definición, se tiene que $f((0, 1)) = (0, 1)$, y por tanto f es acotada. Sin embargo, como $(0, 1)$ es un intervalo abierto, la función f no alcanza su supremo.

10. Demuestre que si $A, B \subset \mathbb{R}$ son dos conjuntos acotados tales que para todo $s \in A$ y $S \in B$ se tiene que $s \leq S$, entonces $\sup A = \inf B$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tales que $y_0 - x_0 < \varepsilon$.

Solución. En primer lugar, probaremos que si $\sup A = \inf B$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tales que $y_0 - x_0 < \varepsilon$. Por definición de $\sup A$ e $\inf B$, existen $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tales que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x_0, \quad y_0 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sumando ambas desigualdades, como $\sup A = \inf B$, se obtiene que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} + y_0 < x_0 + \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow y_0 - x_0 < \varepsilon.$$

Ahora probaremos que si para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tales que $y_0 - x_0 < \varepsilon$, entonces $\sup A = \inf B$. Para todo $x \in A$ e $y \in B$ se tiene $x \leq y$, así, para $y_1 \in B$ fijo y para todo $x \in A$ se cumple que

$$x \leq y_1 \Rightarrow \sup A \leq y_1 \Rightarrow \sup A \leq \inf B.$$

De donde $\sup A$ es cota inferior de B . Ahora, dado $\varepsilon > 0$ existen $y_0 \in B$ y $x_0 \in A$ tales que $y_0 - x_0 < \varepsilon$, así

$$y_0 - \varepsilon < x_0 < \sup A \Rightarrow y_0 < \sup A + \varepsilon.$$

Por lo tanto $\sup A = \inf B$.

11. Utilizando el Teorema de los Intervalos Encajados demuestre que el conjunto de los números reales es no numerable.

Solución. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto numerable, probaremos que $X \neq \mathbb{R}$. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado. Existe un intervalo cerrado $I_1 = [c, d]$, tal que $x_1 \notin I_1$ e $I_1 \subset I$. Nuevamente, sea $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Inductivamente podemos probar que existen intervalos $I_{n+1} \subset I_n$, tales que $x_n \notin I_n$. De este modo obtenemos una sucesión $I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ de intervalos cerrados, acotados y no vacíos. Por el Teorema de los Intervalos Encajados, existe un número real x que pertenece a todos los intervalos. Por construcción, $x \notin X$ y por ende $X \neq \mathbb{R}$. El resultado sigue por contradicción.

12. Sean $(a_n)_n, (b_n)_n$ dos sucesiones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Demuestre que

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$.
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$. Como $(a_n)_n$ es una sucesión acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b) = 0$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n - b) = 0$. De la misma forma probamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a)b = 0$. Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n - ab) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n - b) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a)b = 0.$$

Observamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n b = b^2$, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tiene $b_n b > b^2/2 > 0$. En particular, si $n > N$ entonces $0 < \frac{1}{b_n b} < \frac{2}{b^2}$. Es decir, la sucesión $(1/b_n b)_n$ es acotada. Luego, como

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n - ab_n}{b_n b}, \quad (1.4)$$

y además $\lim_{n \rightarrow \infty} (ba_n - ab_n) = ab - ab = 0$, se tiene que (1.4) es una sucesión acotada multiplicada por una que tiende a cero. De aquí el resultado sigue.

13. De un ejemplo de una sucesión $(a_n)_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a$, pero la sucesión $(a_n)_n$ no converge.

Solución. Sea $a_n = (-1)^n$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_{2n+1} = -1$ y $a_{2n} = 1$, por ende tenemos dos subsucesiones con límites distintos. Por tanto $(a_n)_n$ no converge. Por otra parte, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|a_n| = 1$, así $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$.

14. Pruebe que si $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Solución. Consideremos la sucesión constante $c_n = -1$, y por ende convergente. Por el Ejercicio 12,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Además, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

15. Sea $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$. Demuestre que la sucesión es monótona creciente y acotada. Calcule su límite.

Solución. Como $\sqrt{n^2 + n} \geq n$, entonces $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Además (a_n) es creciente, pues

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n^2 + 3n + 2} &\leq 2n + 3 \quad \Rightarrow \quad n^2 + n \leq (n^2 + 3n + 2) - 2\sqrt{n^2 + 3n + 2} + 1 \\ \Rightarrow \quad \sqrt{n^2 + n} &\leq \sqrt{n^2 + 3n + 2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n^2 + n} - n \leq \sqrt{(n+1)^2 + (n+1)} - (n+1). \end{aligned}$$

Notamos además que (a_n) es una sucesión acotada superiormente. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \leq 3.$$

Dado que la sucesión es creciente y acotada, entonces converge. Luego, de la ecuación anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} = \frac{1}{2}.$$

16. Sea $(a_n)_n$ una sucesión que satisface $2a_{n+1}a_{n-1} = a_n a_{n-1} - 1$. Determine si la sucesión converge.

Solución. Supongamos que $(a_n)_n$ converge a un límite $L \in \mathbb{R}$. Entonces también $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = L$. Tomando el límite en la recurrencia, obtenemos que $2L^2 = L^2 - 1$ y por ende $L^2 = -1$.

Esta última ecuación no tiene ninguna solución real, por lo que $(a_n)_n$ no converge.

17. a) Sean $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, y $(x_n)_n$ una sucesión de números positivos. Pruebe que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^r = a^r$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(x_n) = \log a$.
 b) Sean $b \in \mathbb{R}$ y $(y_n)_n$ una sucesión. Pruebe que si $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n} = e^b$.

Solución. Parte a). Primero probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^r = a^r$. Para esto consideraremos tres casos. Primero, sea $r \in \mathbb{Z}$. Por el Ejercicio 12, si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^r = a^r$. Sea ahora $r = 1/k$ donde $k \geq 2$ es un número natural. En este caso, factorizamos

$$x_n - a = (x_n^{1/k})^k - (a^{1/k})^k = (x_n^{1/k} - a^{1/k}) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x_n^{i/k} a^{(k-1-i)/k}.$$

Además como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, existe $N_1 > 0$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $x_n > \frac{a}{2}$. Por lo tanto para $n \geq N_1$ se obtiene que $\sum_{i=0}^{k-1} x_n^{i/k} a^{(k-1-i)/k} \geq \frac{k}{2} a^{\frac{k-1}{k}}$. Sea $C = \frac{k}{2} a^{\frac{k-1}{k}}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, existe $N_2 > 0$ tal que para $n \geq N_2$ se tiene que $|x_n - a| \leq C\varepsilon$, en particular obtenemos que

$$|x_n^{1/k} - a^{1/k}| \leq \frac{|x_n - a|}{\sum_{i=0}^{k-1} x_n^{i/k} a^{(k-1-i)/k}} \leq \frac{|x_n - a|}{C} \leq \varepsilon.$$

Por último, si $r \in \mathbb{Q}$, escribimos $r = l/k$ con $l \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$. Por los casos anteriores concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^l = a^l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^l)^{1/k} = (a^l)^{1/k} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^r = a^r.$$

Ahora probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(x_n) = \log a$. Sea $0 < \varepsilon < 1$. Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$ se tiene

$$|x_n - a| < \delta = \min\{a(1 - e^{-\varepsilon}), a(e^\varepsilon - 1)\}.$$

Por lo tanto, tenemos que $ae^{-\varepsilon} - a < x_n - a < ae^\varepsilon - a$ lo que implica $|\log x_n - \log a| < \varepsilon$.

Parte b). Por último probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n} = e^b$. Sea $0 < \varepsilon < e^b$. Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$ se tiene

$$|x_n - a| < \delta = \min\{b - \log(e^b - \varepsilon), \log(e^b + \varepsilon) - b\}.$$

Por lo tanto, $\log(e^b - \varepsilon) < y_n < \log(e^b + \varepsilon)$ lo que implica $|\log x_n - \log a| < \varepsilon$. De aquí se concluye.

18. Pruebe que para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r.$$

Solución. Consideramos n suficientemente grande de modo que $|r/n| < 1$. Por la desigualdad de la media aritmética-geométrica se tiene

$$1 + \frac{r}{n+1} = \frac{(1 + r/n) + \cdots + (1 + r/n) + 1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n},$$

de donde concluimos que

$$\left(1 + \frac{r}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Por lo tanto la sucesión es creciente.

Ahora probamos que es acotada superiormente. Por el Teorema del Binomio, tenemos

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{r}{n}\right)^k \leq \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \frac{|r|^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{|r|^k}{k!} \leq C,$$

ya que la serie del lado derecho es convergente (Ejemplo 1.60). Así, concluimos que $(1 + r/n)^n$ converge para toda real r (no hemos usado que es racional). Sea ahora $r = p/q \in \mathbb{Q}$. Como la sucesión converge, podemos calcular su límite considerando la subsucesión de múltiplos de p . Sea $n_m = p \cdot m$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{qpm}\right)^{mp} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{qm}\right)^{qm}\right)^{p/q} = e^{p/q}.$$

Donde en la última igualdad hemos usado el Ejercicio 17.

19. Calcule los siguientes límites:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n,$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n},$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 1}\right)^{(n+1)^2}.$$

Solución.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2} = \sqrt{e}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^4} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^4}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^4} = e^4.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 1}\right)^{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2 + 2n + 1}\right)^{(n+1)^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2/2}\right)^{\frac{(n+1)^2}{2}}\right)^2 = e^2.$$

20. Sean $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Solución. Asumimos sin pérdida de generalidad que $a \leq b$. Por ende $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{b^n + b^n} = b \sqrt[n]{2}$. Notamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Luego, por el Teorema del Sandwich, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

21. Diremos que una sucesión $(a_n)_n$ converge en el sentido de Cesàro si el siguiente límite existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

a) Sea $(a_n)_n = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.

b) Construya otros ejemplos de sucesiones que no convergen, pero que sean convergentes en el sentido de Cesàro.

Solución.

a) Para n par, tenemos $a_n = \frac{1}{2}$, y para n impar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$. Por tanto, el límite es $1/2$.

b) Consideremos la sucesión $(-1)^n$. Esta no converge, pero si converge en el sentido de Cesàro a 0.

22. Demuestre que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a.$$

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_1$ tenemos $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Sea $C := \sum_{k=1}^{N_1-1} |x_k - a|$ y elijamos $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $C/n < \varepsilon/2$ para $n \geq N_2$. Entonces, para $n \geq \max\{N_1, N_2\}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - a \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1-1} |x_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1}^n |x_k - a| \leq \frac{C}{n} + \frac{n - N_1 + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así, concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = a$.

23. Demuestre que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y todos los términos de la sucesión son positivos entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a.$$

Solución. Primero suponemos que $a > 0$. Por el Ejercicio 17 se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log a$. Usando el Ejercicio 22 con la sucesión $x_n = \log a_n$ obtenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log a_k = \log a$. Aplicando la función exponencial en ambos lados de la desigualdad,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log a_k\right) = \exp(\log a) = a,$$

donde usamos el Ejercicio 17. Además $\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log a_k\right) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$, y así concluimos este caso.

En segundo lugar, suponemos que $a = 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $0 < a_n < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Sea $M := \prod_{k=1}^{N-1} a_k > 0$. Para $n \geq N$ se tiene $\prod_{k=1}^n a_k = \left(\prod_{k=1}^{N-1} a_k\right) \left(\prod_{k=N}^n a_k\right) \leq M \cdot \varepsilon^{n-N+1}$. Tomando la raíz enésima,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq M^{1/n} \varepsilon^{(n-N+1)/n} = M^{1/n} \varepsilon^{(-N+1)/n} \varepsilon.$$

Además como $M^{1/n} \varepsilon^{(-N+1)/n} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, la sucesión $\{M^{1/n} \varepsilon^{(-N+1)/n}\}_n$ es acotada. Luego, por definición, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = 0$. Esto concluye el ejercicio.

24. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots 2n} = \frac{4}{e}.$$

Solución. Como $(n+1)(n+2) \dots (2n) = \frac{(2n)!}{n!}$, podemos escribir $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$. Sea $b_n := -\log n + \frac{1}{n} (\log((2n)!) - \log n!)$. Observe que si b_n converge a un número real b , entonces $L = e^b$ por el Ejercicio 17. Por la fórmula de Stirling, $a_m := \log m! - m \log m + m - \frac{1}{2} \log(2\pi m) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\log(2n)! - \log n! = 2n \log 2 + n \log n - n + \frac{1}{2} \log 2 + a_{2n} - a_n.$$

Dividiendo por n y tomando $n \rightarrow \infty$, tenemos $b = 2 \log 2 - 1$, y por lo tanto $L = \frac{4}{e}$.

25. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right).$$

Solución. El resultado se sigue de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \cdots + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

26. Calcule el límite de la sucesión definida por

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Solución. Primero reescribimos

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}.$$

Como $0 < \frac{k}{n^2} < \frac{1}{n}$, se cumple $(1 + \frac{1}{n})^{-1/2} \leq (1 + \frac{k}{n^2})^{-1/2} \leq 1$, y por lo tanto $(1 + \frac{1}{n})^{-1/2} \leq a_n \leq 1$. Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y aplicando el Teorema del Sandwich obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

27. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right).$$

Solución. Notemos que

$$0 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Luego, el límite es cero por el Teorema del Sandwich.

28. Dado $p \in \mathbb{N}$ fijo, calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^p + 2^p + \cdots + n^p}.$$

Solución. Sea $S_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$. Observamos que $n^p \leq S_n \leq n \cdot n^p = n^{p+1}$, y luego $n^{p/n} \leq \sqrt[n]{S_n} \leq n^{(p+1)/n}$. Como $n^{p/n} \rightarrow 1$ y $n^{(p+1)/n} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, el límite es 1 por el Teorema del Sandwich.

29. Sean $a, b, c > 0$. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an+b}{an+c} \right)^n.$$

Solución. Dividiendo por a en la fracción arriba, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a = 1$. Ahora, si $b = c$, entonces el límite es claramente igual a 1. Supongamos ahora que $b \neq c$. Supongamos además que $b > c > 0$. En este caso, tenemos que

$$\left(1 + \frac{b-c}{n+c} \right)^n \leq \left(1 + \frac{b-c}{n} \right)^n.$$

Además, con $m(n) = \lceil n+c \rceil \in \mathbb{N}$, podemos acotar

$$\left(1 + \frac{b-c}{n+c} \right)^n \geq \left(1 + \frac{b-c}{m} \right)^n = \left(1 + \frac{b-c}{m} \right)^m \left(1 + \frac{b-c}{m} \right)^{n-m}.$$

Usando que la diferencia $|m(n) - n| \leq c + 1$ es acotada, tenemos que

$$\left(1 + \frac{b-c}{m(n)} \right)^{m(n)} d(n) \leq \left(1 + \frac{b-c}{n+c} \right)^n \leq \left(1 + \frac{b-c}{n} \right)^n,$$

donde $d(n) = \left(1 + \frac{b-c}{m} \right)^{n-m}$ es tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(n) = 1$. Luego, por el Teorema del Sandwich, concluimos que el límite pedido es e^{b-c} . Ahora bien, si reincorporamos la constante a , entonces el límite pedido

es $e^{\frac{b-c}{a}}$. Los casos donde la condición $b > c > 0$ no se satisface se pueden resolver similarmente.

30. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2n+1}}{2(n!)}$$

Solución. Por la fórmula de Stirling, la cual dice $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1/n!) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2n+1}}{2(n!)} \right) \left(\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2n+1}}{2\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \right)^{-1} = 1.$$

Además $\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2n+1}}{2\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{2 + \frac{1}{n}}$. Finalmente tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$.

31. Calcule los siguientes límites

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right),$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}},$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$$

Solución.

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{(\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = 0.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n \cdot n^{3/4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/2}}{n^{7/8}} = 0.$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1} = 3.$$

32. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

es convergente y que su límite pertenece al intervalo $[1/2, 1]$.

Solución. Primero probamos que $(a_n)_n$ es decreciente. Observemos que

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} = a_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}.$$

Notemos que $a_{n+1} \leq a_n$ es equivalente a $n(2n+1) + n(2n+2) \leq (2n+1)(2n+2)$, lo cual es equivalente a $4n^2 + 3n \leq 4n^2 + 6n + 2$, que es cierto para todo natural n . Además $(a_n)_n$ es acotada, pues

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$$

Por lo tanto $(a_n)_n$ es convergente y su límite pertenece al intervalo $[1/2, 1]$.

33. Demuestre que si $(a_n)_n$ es una sucesión de términos no negativos tal que existe $K \in (0, 1)$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_{n+1} \leq Ka_n$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Solución. Notamos que $a_2 \leq Ka_1$, $a_3 \leq Ka_2 \leq K^2a_1$, así, en general $a_n \leq K^{n-1}a_1$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $a_n \geq 0$. Por el Teorema del Sandwich obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

34. Sean $(a_n)_n$ una sucesión creciente y $(b_n)_n$ una sucesión decreciente. Demuestre que si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n < b_n$ entonces las dos sucesiones convergen.

Solución. Por una parte $(a_n)_n$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por b_1 . Y por lo tanto convergente. Por otra parte, $(b_n)_n$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por a_1 . Por lo tanto también converge.

35. Sea (a_n) una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = c.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = c.$$

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N_1$ se tiene $|a_{k+1} - a_k - c| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, para $n > N_1$ tenemos

$$a_n - a_{N_1} = \sum_{k=N_1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = (n - N_1)c + \sum_{k=N_1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k - c).$$

Dividiendo por n ,

$$\left| \frac{a_n}{n} - c \right| = \frac{1}{n} \left| a_{N_1} - N_1c + \sum_{k=N_1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k - c) \right| \leq \frac{1}{n} \left(|a_{N_1}| + N_1|c| + (n - N_1) \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Además, existe $N_2 > 0$ tal que para $n > N_2$ se tiene $\frac{1}{n}(|a_{N_1}| + N_1|c|) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, para $n > \max\{N_1, N_2\}$ se cumple $\left| \frac{a_n}{n} - c \right| < \varepsilon$, y concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = c$.

36. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Estudie la convergencia de la sucesión definida por $a_n = n^k x^n$.

Solución. Consideramos tres casos distintos.

Caso 1: $|x| < 1$. El caso $x = 0$ es trivial, así que vamos a asumir $x \neq 0$. Observemos que $|a_{n+1}|/|a_n| = (1 + 1/n)^k |x|$. Como $(1 + 1/n)^k |x|$ converge a $|x|$ cuando $n \rightarrow \infty$, podemos elegir $|x| < \alpha < 1$ y encontrar un natural N tal que $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \alpha$ para todo $n \geq N$. Ahora, para todo $n \geq 0$ tenemos que $|a_{N+n}| \leq \alpha |a_{N+n-1}| \leq \alpha^2 |a_{N+n-2}| \leq \cdots \leq \alpha^n |a_N|$. Como $\alpha \in (0, 1)$, el lado derecho tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, por lo que concluimos que $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Caso 2: $|x| = 1$. Si $x = 1$ entonces $a_n = n^k \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otra parte, si $x = -1$, entonces $a_n = n^k (-1)^n$ no converge.

Caso 3: $|x| > 1$. Sea $|x| = y > 1$. Entonces $|a_n| = n^k y^n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

37. Sea $\beta > 1$. Consideremos la sucesión definida por $a_n = n(\sqrt[n]{\beta} - 1)$. Demuestre que la sucesión converge. Defina además la función, $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(\beta) := \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{\beta} - 1).$$

Demuestre que $f(\beta) \geq 1 - (1/\beta)$ y que $f(1/\beta) = -f(\beta)$.

Solución. Observemos que $\sqrt[n]{\beta} = e^{\frac{\log \beta}{n}}$, por ende $a_n = n(\beta^{1/n} - 1) = n(e^{\frac{\log \beta}{n}} - 1)$.

Usando el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

tomando $x = \frac{\log \beta}{n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$a_n = n(e^{\frac{\log \beta}{n}} - 1) = \frac{e^{\frac{\log \beta}{n}} - 1}{\frac{\log \beta}{n}} \cdot \log \beta \rightarrow \log \beta.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_n) converge y se tiene

$$f(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log \beta.$$

Queremos mostrar que

$$\log \beta \geq 1 - \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 1.$$

Usamos la desigualdad, $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $x = -\log \beta < 0$ por ende

$$e^{-\log \beta} \geq 1 - \log \beta.$$

Como $e^{-\log \beta} = \frac{1}{\beta}$, se sigue que

$$\frac{1}{\beta} \geq 1 - \log \beta \implies \log \beta \geq 1 - \frac{1}{\beta}.$$

Además,

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{\beta}} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left((\beta^{-1})^{1/n} - 1\right).$$

Entonces,

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{1}{\beta^{1/n}} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n(\beta^{1/n} - 1) \cdot \frac{1}{\beta^{1/n}}.$$

Como $\beta^{1/n} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n(\beta^{1/n} - 1) = -f(\beta).$$

38. Sea

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Solución. Observamos que a_n puede escribirse como

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Denotamos la suma parcial $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. El término S_n cuenta cuántos enteros impares hay entre 1 y n . Por tanto $S_n = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, es decir

$$S_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora consideramos la razón

$$\frac{S_n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En el caso impar, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$. Por tanto, las subsucesiones de índices pares e índices impares convergen ambas a $1/2$. El resultado se sigue usando la definición de límite.

39. Sea $x \in \mathbb{R}$, calcule el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \arctan(nx).$$

En teoría de números la función definida por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \arctan(nx),$$

es llamada *signo* de x .

Solución. Si $x > 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} nx = +\infty$ y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}$, de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \arctan(nx) = 1$. Si $x < 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} nx = -\infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(nx) = -\frac{\pi}{2}$, de modo que el límite vale -1 . Y si $x = 0$, se obtiene que $\frac{2}{\pi} \arctan(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \arctan(nx) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

40. Sea $x \in \mathbb{Q}$ un número racional. Estudie la convergencia de la sucesión definida por $a_n = \sin(n!x\pi)$.

Solución. Sea $x = p/q$ un número racional. Si $n > q$ tenemos que $n! \frac{p}{q} = 2k$ es un entero par, y por lo tanto $\sin(n!x\pi) = \sin(2k\pi) = 0$. Luego, la sucesión es convergente con límite cero.

41. Sea $S_n := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \neq b \text{ y } a + b = n\}$. Denotemos por

$$\alpha_n = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m}{m},$$

donde $S_n = \{(a_i, b_i)\}_{1 \leq i \leq m}$. Es decir α_n es el promedio aritmético de los productos de todos los pares $(a, b) \in S_n$. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

Solución. Para $a = 1, 2, \dots, n-1$ se tiene $b = n-a$ y el producto correspondiente es $a(n-a)$. Definimos

$$T_n := \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a) = n \sum_{a=1}^{n-1} a - \sum_{a=1}^{n-1} a^2 = n \cdot \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}.$$

Caso 1: n impar. No hay par con $a = b$, así que $|S_n| = n-1$ y $\alpha_n = \frac{T_n}{n-1} = \frac{n(n+1)}{6}$. Por lo tanto $\frac{\alpha_n}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Caso 2: n par. Hay que excluir el par $(n/2, n/2)$ cuyo producto es $n^2/4$, por lo que $|S_n| = n-2$ y

$$\alpha_n = \frac{T_n - \frac{n^2}{4}}{n-2} = \frac{\frac{n(n-1)(n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}}{n-2} = \frac{n(2n^2 - 3n - 2)}{12(n-2)}.$$

Dividiendo por n^2 obtenemos $\frac{\alpha_n}{n^2} \rightarrow 1/6$ cuando $n \rightarrow \infty$. En ambos casos, el límite es $1/6$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n^2} = 1/6$.

42. Sea $(a_n)_n$ una sucesión super-aditiva, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$a_n + a_m < a_{n+m} + C.$$

Demuestre que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ o bien existe o bien es igual a infinito.

Solución. Sea $n = mq + r$ con $0 \leq r < m$. Aplicando la superaditividad repetidamente obtenemos, por inducción,

$$a_{qm} \geq qa_m - (q-1)C.$$

Luego,

$$a_n = a_{qm+r} \geq a_{qm} + a_r - C \geq qa_m - (q-1)C + a_r - C = qa_m - qC + a_r.$$

Dividimos por $n = mq + r$:

$$\frac{a_n}{n} \geq \frac{q(a_m - C)}{mq + r} + \frac{a_r}{n}.$$

Fijando m y haciendo $n \rightarrow \infty$ (y por lo tanto $q \rightarrow \infty$), se tiene $r/n \rightarrow 0$ y $q/(mq+r) \rightarrow 1/m$. Por lo tanto,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \geq \frac{a_m - C}{m}.$$

Esto vale para todo $m \geq 1$, así que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \geq \sup_{m \geq 1} \frac{a_m - C}{m}.$$

Si la sucesión $(a_n/n)_n$ está acotada superiormente, entonces el límite existe y es finito. Si no, el supremo es infinito y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = +\infty$.

43. Todo número $x \in (0, 1)$ puede escribirse como *fracción continua* de la forma

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_1 a_2 a_3 \dots], \quad (1.5)$$

donde $a_i \in \mathbb{N}$. Un resultado clásico en teoría de números afirma que $x \in (0, 1)$ es irracional si y sólo si su expansión en fracciones continuas es infinita, es decir $x = [a_1 a_2 a_3 \dots]$. Defina los siguientes números racionales

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1 a_2 \dots a_n].$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Solución. Sea $x \in (0, 1)$ un número irracional con expansión en fracción continua $x = [a_1 a_2 a_3, \dots]$. Los numeradores y denominadores (p_n, q_n) de las fracciones truncadas satisfacen las recurrencias,

$$\begin{cases} p_0 = 0, & p_1 = 1, \\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & n \geq 2, \end{cases} \quad \begin{cases} q_0 = 1, & q_1 = a_1, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Además, se puede verificar la identidad $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$. Consideremos ahora el error $|x - \frac{p_n}{q_n}|$. Usando la identidad anterior, se tiene que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Como los denominadores q_n forman una sucesión estrictamente creciente e ilimitada (ya que x es irracional), se tiene que $q_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

De aquí se concluye que las fracciones truncadas $\frac{p_n}{q_n}$ convergen al número irracional x .

44. En [8] se sugiere una alternativa sencilla para demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} = e.$$

Pruebe que

$$\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} - \frac{3}{2n},$$

y deduzca el resultado.

Solución. Tomando el límite en la segunda desigualdad se obtiene automáticamente la primera parte. Por ende, basta probar la segunda parte. Por el Teorema del Binomio,

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} = 2 + \sum_{r=2}^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n} \right) \frac{1}{r!}.$$

Como $1 > (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{r-1}{n})$ para $r \leq n$ se tiene que

$$\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} = 2 + \sum_{r=2}^n \frac{1}{r!} > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Por otra parte

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) = 1 - \frac{1+2}{n} + \frac{2}{n^2} > 1 - \frac{1+2}{n}.$$

Además

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \left(1 - \frac{3}{n} \right) > \left(1 - \frac{1+2}{n} \right) \left(1 - \frac{3}{n} \right) > 1 - \frac{1+2+3}{n}.$$

Inductivamente se puede verificar que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) > 1 - \frac{1+2+\cdots+(r-1)}{n} > 1 - \frac{r(r-1)}{2n}.$$

Por lo tanto cuando $n \geq 3$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 + \sum_{r=2}^n \left(1 - \frac{r(r-1)}{2n}\right) \frac{1}{r!} = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} - \frac{1}{2n} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{1}{r!} > \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} - \frac{3}{2n},$$

pues $\sum_{r=0}^{n-2} \frac{1}{r!} < 3$ por el Ejemplo 1.16. Para concluir el resultado basta tomar el límite en n y usar el Teorema del Sandwich.

45. Se define recursivamente la sucesión $(a_n)_n$ por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}.$$

Demuestre que (a_n) es una sucesión convergente y encuentre su límite.

Solución. Supongamos que a_n converge a un límite $L \in \mathbb{R}$. Tomando el límite en la recurrencia, L es $L_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ o bien $L_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Demostraremos que la sucesión es decreciente y acotada inferiormente por L_2 , para concluir que converge. Probaremos que para todo $n \geq 1$ se cumple,

$$L_2 < a_{n+1} < a_n.$$

Por inducción, primero verificamos el caso en que $n = 1$. Por definición $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, los cuales satisfacen $L_2 \approx 0,382 < a_2 = 1 < a_1 = 2$. Ahora, supongamos que para $n \geq 1$ se cumple $L_2 < a_n < a_{n-1}$. Demostraremos que $L_2 < a_{n+1} < a_n$. Además, si $a_n > L_2$, tenemos que

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} > \frac{1}{3 - L_2} = L_2.$$

Ahora probamos que la sucesión es decreciente. Como $a_n < a_{n-1}$, se sigue que

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} < \frac{1}{3 - a_{n-1}} = a_n.$$

Con esto concluimos el paso inductivo. Por lo tanto la sucesión converge pues (a_n) es decreciente y acotada inferiormente por L_2 . Además $1 = a_1 > a_n > L_2$ para todo n , por lo que el límite debe ser L_2 .

46. La sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n \geq 1}$ se define recursivamente como

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Kepler notó la siguiente relación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Demuestre la observación de Kepler.

Solución. Sea $b_n := a_{n+1}/a_n$ y observemos que $b_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$. Esta propiedad está bien definida pues $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si la sucesión $(b_n)_n$ es convergente con límite L entonces

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_{n-1}}\right) = 1 + \frac{1}{L}.$$

Por lo tanto $L^2 - L - 1 = 0$, luego $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o $L = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por otra parte, como $b_n \geq 1$, en caso que el límite L exista, necesariamente $L \geq 1$ y por lo tanto debe ser igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Probaremos ahora que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: L$. Notamos que

$$|b_n - L| = \left| \left(1 + \frac{1}{b_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{L}\right) \right| = \left| \frac{L - b_{n-1}}{b_{n-1}L} \right| \leq \frac{1}{L} |b_{n-1} - L| \leq \left(\frac{1}{L}\right)^{n-1} |b_1 - L|.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{L}\right)^{n-1} = 0$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|b_n - L| < \varepsilon$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

47. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Definimos recursivamente las sucesiones $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ por

$$x_1 = \sqrt{ab}, \quad y_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Demuestre que ambas sucesiones, que se conocen como sucesiones aritmético-geométricas, convergen al mismo límite.

Solución. Por la desigualdad de la media aritmética-geométrica, $x_1 = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = y_1$ y además

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leq \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Notamos que la sucesión (x_n) es creciente. En efecto,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Luego (x_n) es creciente. Además (x_n) es acotada pues $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leq \sqrt{y_n y_n} = y_n$. En particular, es acotada superiormente por y_1 . Como (x_n) es creciente y acotada, converge a un límite $L \in \mathbb{R}$.

Notamos que la sucesión (y_n) decreciente. En efecto, de $x_n \leq y_n$ se sigue

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

Luego (y_n) es decreciente. Además (y_n) es acotada pues $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} > \frac{x_n + x_n}{2} = x_n$. En particular, (y_n) es acotada por x_1 . Como (y_n) es decreciente y acotada, converge a un límite $M \in \mathbb{R}$.

Finalmente, tomando límites en las recurrencias,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \implies L = \sqrt{LM} \implies L^2 = LM \implies L = M,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \implies M = \frac{L + M}{2} \implies M = L.$$

Por lo tanto, ambas sucesiones convergen al mismo límite.

48. Calcule los siguientes límites

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n(\log(n+1) - \log n)).$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin(n\pi/2)}{2n+1}.$$

Solución.

a) Por el Ejercicio 17, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n(\log(n+1) - \log n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \log(e) = 1.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin(n\pi/2)}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin(n\pi/2)/n}{2 + 1/n} = 1/2.$$

49. Sea (a_n) una sucesión de números positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Solución. Definimos la sucesión $b_n := \log(a_n)$. Esta sucesión está bien definida pues está compuesta por números positivos. Por definición, $\sqrt[n]{a_n} = e^{b_n/n}$. Y además

$$b_{n+1} - b_n = \log(a_{n+1}) - \log(a_n) = \log \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \log L,$$

debido al Ejercicio 17. Por el Criterio de Cesàro, si $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = \log L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \log L$. Luego, usando que el Ejercicio 17 se puede extender a la función exponencial, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n/n} = e^{\log L} = L$.

50. En 1615 Galileo notó que la sucesión de los números impares tiene la siguiente propiedad

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots$$

Galileo observó que esta es la única progresión aritmética con esta propiedad. Determine si la afirmación de Galileo es correcta. Considere sucesiones para las cuales la razón de la suma de los primeros n términos sobre la suma de los siguientes n términos es constante (ver [10]).

Solución. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una progresión aritmética que satisface tal propiedad. Primero observamos que si $c > 0$ entonces la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $b_n = a_n \cdot c$ también la satisface y tiene la misma razón. Debido a esto asumimos que $a_1 = 1$. Sea $S_n = a_1 + \dots + a_n$, en tal caso buscamos una progresión aritmética tal que $S_{2n} - S_n = pS_n$ para alguna constante p . Usando que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ para algún d , se tiene que $S_n = n \cdot (a_1 + a_n)/2$ para todo n . Así, para todo n ,

$$\frac{a_1 \cdot (1-p)}{2} = \frac{a_n \cdot (p+1)}{2} - a_{2n},$$

y por lo tanto para todo n ,

$$\frac{a_1 \cdot (1-p)}{2} = \frac{a_1 \cdot (p-1)}{2} + \frac{d}{2} \left((n-1)(p+1) - 2(2n-1) \right).$$

Como $a_1 = 1$,

$$(1-p) = \frac{d}{2} \left((p-3)n + (1-p) \right)$$

implica que $p = 3$ y $d = 2$. Esta implicancia anterior se debe a que d, p son constantes y la igualdad anterior debe satisfacerse para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto esta sucesión es la única que satisface esta pro-

piedad módulo la constante c de la que hablamos al comienzo.

51. Sea $(a_n)_n$ una sucesión no creciente de números no negativos,

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Denotaremos por C la siguiente condición: Para cada $x > 1$ y $u \in \mathbb{R}$ el siguiente límite existe

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{u < n \leq ux} a_n.$$

Sea $(a_n)_n$ tal que satisface C . Demuestre que si $(a_n)_n$ también satisface C entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ existe. El recíproco de este resultado también es válido (ver [11]).

Solución. Definimos $f_u(x) = \sum_{u < n \leq ux} a_n$ y $f(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} f_u(x)$ el cual existe por la condición C para $x > 1$. En particular para $m \in \mathbb{N}$, $f_m(x) = \sum_{n=m+1}^{[mx]} a_n$. Como a_n es decreciente,

$$f_j(x) \leq ([jx] - j)a_j \leq (jx - j)a_j \implies ja_j \geq \frac{f_j(x)}{x-1}.$$

Luego, para cada entero $j > x$ consideremos $m = [j/x]$ y $r = j - [mx]$. Entonces,

$$0 \leq j - mx \leq j - [mx] < j - (mx - 1) < j - \left(\left(\frac{j}{x} - 1 \right) x - 1 \right) = x + 1,$$

de lo cual se obtiene que $0 \leq r < x + 1$ y $j \geq mx \geq [mx]$. Así, $f_m(x) \geq ([mx] - m)a_{[mx]} \geq ([mx] - m)a_j$ implica que

$$\begin{aligned} ja_j &\leq \frac{[mx] + r}{[mx] - m} f_m(x) \leq \frac{mx + x + 1}{mx - m - 1} f_m(x) \leq \frac{j + x + 1}{((j/x) - 1)x - m - 1} f_m(x) \\ &\implies ja_j \leq \frac{j + x + 1}{(j - x - 1 - (j/x))} f_{[j/x]}(x). \end{aligned}$$

Tomando límite

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f_j(x)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j+x+1}{(j-x-1-(j/x))} f_{[j/x]}(x) = \frac{x}{x-1} f(x).$$

Usando las propiedades anteriores,

$$\frac{f(x)}{x-1} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} ja_j \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} ja_j \leq \frac{x}{x-1} f(x).$$

En lo que sigue probaremos que $f(x) + f(y) = f(xy)$. Teniendo esta propiedad, $kf(e^{1/k}) = f(e)$ y tomando $x = e^{1/k}$ en la desigualdad anterior, se obtiene que

$$\frac{f(e)}{k(x-1)} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} ja_j \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} ja_j \leq \frac{x}{x-1} \cdot \frac{f(e)}{k}.$$

Y como $\lim_{k \rightarrow \infty} k(x-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} k(e^{1/k} - 1) = 1$, entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} ja_j = f(e)$ y el límite pedido existe. Para finalizar probamos la propiedad anterior. Para $x > 1$, $y > 1$, $n > 1$, donde n es entero, se tiene que

$$f_n(x) + f_{[nx]}(y) - f_n(xy) = \sum_{k=[[nx]y]+1}^{[nxy]} a_k,$$

donde $\lceil \lceil nx \rceil y \rceil \leq \lceil nxy \rceil$ y además $\lceil \lceil nx \rceil y \rceil > \lceil nxy - y \rceil > nxy - y - 1 \geq \lceil nxy \rceil - y - 1$. Por lo tanto

$$0 \leq f_n(x) + f_{\lceil nx \rceil}(y) - f_n(xy) \leq (y+1)a_{\lceil \lceil nx \rceil y \rceil} = \frac{y+1}{\lceil \lceil nx \rceil y \rceil} \lceil \lceil nx \rceil y \rceil a_{\lceil \lceil nx \rceil y \rceil} \leq \frac{y+1}{nxy - y - 1} \lceil \lceil nx \rceil y \rceil a_{\lceil \lceil nx \rceil y \rceil}.$$

Tomando el límite en n y notando que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lceil \lceil nx \rceil y \rceil a_{\lceil \lceil nx \rceil y \rceil} < \infty$ por la desigualdad dada antes de hablar de la propiedad especial de f , obtenemos la propiedad, es decir $f(x) + f(y) - f(xy) = 0$, con esto concluimos.

52. J.H. Conway consideró la siguiente sucesión (ver [9]),

$$1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, \dots$$

definida recursivamente del siguiente modo, $a_1 = a_2 = 1$ y para $n \geq 3$

$$a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Solución. Escribiremos $a(n)$ en lugar de a_n . Consideremos el conjunto $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, ordenado del siguiente modo. Primero $\emptyset$. Después, para cada $L \geq 1$, se listan los subconjuntos $A \subseteq \{1, \dots, L\}$ tales que $\max A = L$; dentro de este bloque se ordenan primero por cardinalidad decreciente y, si la cardinalidad es fija, por orden lexicográfico. Así, los primeros conjuntos son

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3\}, \dots$$

Denotemos por $S(n)$ el n -ésimo conjunto de esta lista. Definimos la operación de compresión $C: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por

$$C(\emptyset) = C(\{1\}) = \emptyset,$$

$$C(\{m\}) = \{m-1\} \quad (m > 1),$$

y, si $A = \{u_1 < u_2 < \dots < u_r\}$ con $r \geq 2$,

$$C(A) = \{u_2 - 1, u_3 - 1, \dots, u_r - 1\}.$$

La aplicación C es sobreyectiva y preserva el orden anterior. Por tanto, si $x(n)$ está definida por

$$S(x(n)) = C(S(n)),$$

entonces la sucesión $x(n)$ está bien definida. Además, una inducción directa usando la descripción de los preimágenes de C muestra que

$$x(1) = x(2) = 1$$

y, para $n \geq 3$,

$$x(n) = x(x(n-1)) + x(n - x(n-1)).$$

Por unicidad de la sucesión definida recursivamente, se tiene

$$x(n) = a(n) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Ahora estimaremos $a(n)$. Llamaremos segmento binomial (L, K) al conjunto de los $(A \in \mathcal{F})$ tales que

$$\max A = L, \quad |A| = K.$$

Este segmento tiene longitud

$$\binom{L-1}{K-1}.$$

Además, los conjuntos con máximo L ocupan exactamente las posiciones

$$2^{L-1} + 1, \dots, 2^L.$$

Por tanto, si $S(n)$ pertenece a un segmento L, K , entonces

$$\lceil \log_2(n-1) \rceil = L-1.$$

Definamos

$$b(n) = n - a(n-1).$$

Si n o $n-1$ es una potencia de 2, entonces se tiene

$$a(n) = b(n),$$

y no hay nada que estimar. Supongamos entonces que $S(n)$ pertenece a un segmento interior L, K , es decir, $1 < K < L$. Como C elimina el menor elemento y resta 1 a los demás, tenemos

$$S(a(n)) = C(S(n)),$$

y por lo tanto $S(a(n))$ pertenece al segmento

$$(L-1, K-1).$$

Por otra parte, de la forma en que están ordenados los segmentos binomiales se obtiene que $S(b(n))$ pertenece al segmento

$$(L-1, K).$$

Así, la distancia entre $a(n)$ y $b(n)$ está acotada por la suma de las longitudes de estos dos segmentos:

$$|a(n) - b(n)| \leq \binom{L-2}{K-2} + \binom{L-2}{K-1} = \binom{L-1}{K-1}.$$

En particular,

$$|a(n) - b(n)| \leq \max_j \binom{L-1}{j}.$$

Por la fórmula de Stirling,

$$\max_j \binom{L-1}{j} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{L-1}}{\sqrt{L-1}}.$$

Como $n \geq 2^{L-1}$, se deduce que, para todo $\varepsilon > 0$ y todo n suficientemente grande,

$$\frac{|a(n) - b(n)|}{2n} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \varepsilon \right) \frac{1}{\sqrt{L-1}}.$$

Finalmente,

$$b(n) = n - a(n-1),$$

luego

$$2a(n) - n = a(n) - b(n) + a(n) - a(n-1).$$

Como $a(n) - a(n-1) \in \{0, 1\}$, obtenemos

$$|2a(n) - n| \leq |a(n) - b(n)| + 1.$$

Por consiguiente,

$$\left| \frac{a(n)}{n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|2a(n) - n|}{2n} \leq \frac{|a(n) - b(n)| + 1}{2n}.$$

Usando la estimación anterior y el hecho de que

$$L - 1 = \lceil \log_2(n - 1) \rceil,$$

concluimos que, para todo $\varepsilon > 0$ y todo n suficientemente grande,

$$\left| \frac{a(n)}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \varepsilon \right) \frac{1}{\sqrt{\lceil \log_2(n - 1) \rceil}}.$$

En particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n} = \frac{1}{2}.$$

53. La sucesión de Golay-Rudin-Shapiro (ver [3]) se define recursivamente por

$$a_0 = 1, \quad a_{2n} = a_n, \quad a_{2n+1} = (-1)^n a_n.$$

Sea $s(n) = \sum_{k=0}^n a_k$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $s(n) > 0$.

Solución. Sea $t(n) := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, donde $n \geq 0$. Para probar el ejercicio necesitaremos de los siguientes dos lemas que son dejados al lector como ejercicio.

Lema 1.

$$\begin{aligned} s(2n) &= s(n) + t(n-1), & n \geq 1; \\ s(2n+1) &= s(n) + t(n), & n \geq 0; \\ t(2n) &= s(n) - t(n-1), & n \geq 1; \\ t(2n+1) &= s(n) - t(n), & n \geq 0. \end{aligned}$$

Usando el Lema 1 se puede probar el siguiente lema.

Lema 2.

$$\begin{aligned} s(4n) &= 2s(n) - a(n), & n \geq 1; \\ s(4n+1) &= s(4n+3) = 2s(n), & n \geq 0; \\ s(4n+2) &= 2s(n) + (-1)^n a(n), & n \geq 0. \end{aligned}$$

Más específicamente se tiene que para $k \geq 1$, el mínimo valor para $s(n)$ en $[4^k, 4^{k+1} - 1]$ es $2^k + 1$. El lector también puede verificar que este valor se alcanza en $n = 4^k$ y $n = (5 \cdot 4^k - 2)/3$. Para $k = 0$ el mínimo esta dado por 2 en $[1, 3]$. Por inducción en k , sea $n \in [4^{k+1}, 4^{k+2} - 1]$, entonces $n = 4m + d$ donde $d \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $m \in [4^k, 4^{k+1} - 1]$. Usando el Lema 2 podemos acotar por abajo $s(n)$,

$$s(n) = s(4m + d) \geq 2s(m) + 1 \geq 2(2^k + 1) - 1 \geq 2^{k+1} + 1.$$

Esto finaliza la inducción.

54. Dada una sucesión $(a_n)_n$ construimos una nueva sucesión $(b_m)_m$ del siguiente modo (ver [12]). Sea $d \in \mathbb{N}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos b_m como el m -ésimo término de la sucesión que se construye concatenando nd veces el término a_n , del siguiente modo:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{d, a_1 \text{ términos}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{2d, a_2 \text{ términos}}, \underbrace{a_3, \dots, a_3}_{3d, a_3 \text{ términos}}, \dots$$

Por ejemplo si $a_n = n$ y $d = 1$ entonces $(b_m)_m$ viene dada por

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$$

Demuestre que $b_m = a_{f(m)}$. Donde $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ se define por

$$f(m) = \left\lceil \sqrt{\left\lfloor \frac{2m}{d} \right\rfloor} + \frac{1}{2} \right\rceil - 1 \quad \text{y} \quad [x] = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}.$$

Solución. Se cumple $b_m = a_n$ cuando

$$\frac{n(n-1)}{2}d < m \leq \frac{n(n+1)}{2}d \implies n(n-1) + 1 \leq \left\lfloor \frac{2m}{d} \right\rfloor \leq n(n+1).$$

Y como se cumplen $\sqrt{n(n+1)} < n + 1/2$ y $n - 1/2 < \sqrt{n(n-1) + 1}$, se tiene que

$$n < \sqrt{\left\lfloor \frac{2m}{d} \right\rfloor} + \frac{1}{2} < n + 1.$$

Por tanto $n = f(m)$ y $b_m = a_{f(m)}$.

55. S. Ulam introdujo la siguiente sucesión, sean $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$. Construimos una sucesión creciente de enteros. Un número entero u_n pertenece a la sucesión si puede escribirse de manera única como la suma de dos números pertenecientes a la sucesión, es decir $u_n = u_m + u_k$ con $m, k < n$. Los primeros términos son

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, \dots$$

Aparte de $1 + 2 = 3$, ¿puede la suma de dos elementos consecutivos de la sucesión ser igual al siguiente elemento de la sucesión, $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$? ¿puede la suma de dos elementos consecutivos de la sucesión pertenecer a la sucesión, $u_n + u_{n+1} = u_m$? (ver [14]).

Solución. La segunda respuesta es sí. Los números 62 y 69 son dos términos consecutivos de la sucesión, y su suma, 131, también pertenece a la sucesión.

Sin embargo, en general $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$ no puede suceder. Supongamos por contradicción que $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, y consideremos el número $s := u_{n-1} + u_{n+1}$. Como $u_{n-1} < u_n < u_{n+1}$, tenemos que $u_{n+1} < s < u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$. Ahora probaremos que s pertenece a la sucesión, lo cual contradice la desigualdad anterior. Para probar esto, tenemos que demostrar que s se puede escribir de forma única como esa suma de elementos de la sucesión. Supongamos que $s = u_a + u_b$ con $a < b \leq n + 1$. Si $b = n + 1$, entonces $u_a = u_{n-1}$, pero si $a < n - 1$, entonces $u_a + u_{n+1} \leq u_{n-2} + u_{n+1} < u_{n-1} + u_{n+1} = s$, por lo tanto la única posibilidad con $b = n + 1$ es la representación original. Ahora, si $b \leq n$, entonces ambos u_a y u_b son menores o igual a u_n , y por lo tanto $u_a + u_b \leq u_{n-1} + u_n < u_{n-1} + u_{n+1} = s$. Así, concluimos que s puede escribirse de forma única como suma de dos elementos de la sucesión, y por lo tanto pertenece a la sucesión. Como explicamos antes, esto es una contradicción y se concluye que $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ no puede ocurrir.

56. (Teorema de Toeplitz) Sea $\{c_{n,k} : 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ un arreglo de números reales tales que

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{n,k} = 1$.
- Existe $C > 0$ tal que para todo n ,

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq C.$$

Pruebe que para cualquier sucesión convergente $\{a_n\}$ la sucesión $\{b_n\}$ dada por $b_n := \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k$ donde $n \geq 1$, es también convergente. Y además $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Solución. Sea $a \in \mathbb{R}$. En el caso $a_n = a$ para todo n , tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{n,k} = a$. Ahora supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, y notemos que considerando la nueva sucesión $a'_n := a_n - a$, basta considerar el caso donde la sucesión tiende a cero. Como $\{a_n\}$ tiende a cero, dado $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que $|a_n| < \varepsilon/2C$ para $n \geq n_1$. Por ser $\{a_n\}$ convergente, también es acotada, digamos por $D > 0$. Y por a) existe n_2 tal que $\sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| < \varepsilon/2D$ para $n \geq n_2$. Luego,

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| \cdot |a_k| + \sum_{k=n_1}^n |c_{n,k}| \cdot |a_k| \leq D \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=n_1}^n |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

57. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones de números positivos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 0.$$

Demuestre que la sucesión definida por

$$r_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1,$$

es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n} = 0.$$

Solución. Consideremos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $R_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ y

$$c_{n,k} = \frac{a_{n-k+1} b_k}{a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1}.$$

Mostraremos que $\{c_{n,k}\}$ satisface las condiciones del ejercicio anterior. Fijado k , tenemos

$$c_{n,k} \leq \frac{a_{n-k+1} b_k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-k+1}} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, y claramente $\sum_{k=1}^n c_{n,k} = 1$. Observe también que

$$\frac{r_n}{R_n} = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1} = c_{n,1} \frac{b_1}{B_1} + c_{n,2} \frac{b_2}{B_2} + \cdots + c_{n,n} \frac{b_n}{B_n}.$$

Luego por el ejercicio anterior $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{R_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{B_n} = 0$.

58. Demuestre que si $(a_n)_n$ es una sucesión tal que toda subsucesión $(b_n)_n$ es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq 1,$$

entonces existen a lo más dos puntos a los que converge toda subsucesión convergente.

Solución. Notemos que $\{a_n\}$ debe ser acotada. De otra forma, podemos considerar una subsucesión $\{b_n\}$ tal que $|b_{n+1}/b_n| \geq 2$, contradiciendo la hipótesis. Por contradicción suponemos que $\{a_n\}$ tiene al menos dos puntos límites distintos s y t con $s \neq -t$. Entonces hay subsucesiones $\{b_n\}$ y $\{c_m\}$ disjuntas tales que convergen a s y t respectivamente. Ahora definimos $\{d_i\}$,

$$d_i = \begin{cases} b_{(i+1)/2} & \text{si } i \text{ es impar,} \\ c_{i/2} & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Como para esta subsucesión $\lim_{i \rightarrow \infty} |d_{i+1}/d_i|$ no existe, entonces obtenemos la contradicción.

59. De un ejemplo de una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe una subsucesión $(a_{n_k(m)})_{n \in \mathbb{N}}$, de modo ésta que converge a m .

Solución. Consideremos la sucesión $\{a_n\}_n = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Esta claramente satisface lo pedido.

60. Utilizando la definición de límite superior dada en el Ejemplo 1.42, demuestre que

- a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$.
b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n)(\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n)$, cuando $x_n, y_n > 0$.

Construya ejemplos donde las desigualdades son estrictas.

Solución. Para la parte a), notemos que si fijamos n y consideramos $k' \geq n$, tenemos

$$x_{k'} + y_{k'} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} + \sup\{y_k : k \geq n\},$$

por lo tanto $\sup\{x_k + y_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} + \sup\{y_k : k \geq n\}$, y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos la desigualdad deseada.

Para la parte b), notemos que si fijamos n y consideramos $k' \geq n$, usando que las sucesiones son positivas se tiene que

$$x_{k'} y_{k'} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} y_{k'} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} \sup\{y_k : k \geq n\},$$

por lo tanto $\sup\{x_k y_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} \sup\{y_k : k \geq n\}$, y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos la desigualdad deseada.

Para a) consideramos $x_n = (-1)^n$ e $y_n = (-1)^{n+1}$. Para b) consideramos $x_n = 2^{(-1)^n}$ e $y_n = 2^{(-1)^{n+1}}$.

61. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Demuestre que existen infinitos índices $n_i \in \mathbb{N}$ que satisfacen $a_{n_i} > a_m$ para todo $m > n_i$.

Solución. Consideremos $S_n := \sup_{k \geq n} a_k$ y notemos que esta sucesión es no creciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Como la sucesión $(a_n)_n$ es de términos positivos, deben existir infinitos índices n_i con $S_{n_i+1} < S_{n_i}$. Esto ocurre cuando $a_{n_i} > \sup_{k \geq n_i+1} a_k$, obteniendo el resultado.

62. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1.$$

Solución. Observamos que

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n} + 1 = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{\log n} + 1 = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\log n} + 1 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1,$$

donde hemos usado los Ejercicios 12 y 17 al final.

63. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Solución. Sea $n \geq 2$. En el producto $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ hay al menos $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ factores mayores o iguales que $n/2$. Luego, se tiene que

$$n! \geq (n/2)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \geq (n/2)^{n/2}.$$

Por lo tanto $\sqrt[n]{n!} \geq (n/2)^{1/2}$. Finalmente concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n/2} = +\infty$.

64. Sean $(x_n)_n, (y_n)_n$ dos sucesiones, demuestre que:

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e $(y_n)_n$ es acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

Solución. Como $(y_n)_n$ es acotada inferiormente, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $y_n \geq M$. Sea $K > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ tenemos que $x_n > K - M$. De aquí se sigue el resultado pues para $n \geq N$ se tiene

$$x_n + y_n \geq x_n + M > (K - M) + M = K.$$

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ y existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty.$$

Solución. Sea $M > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que para $n > N$ se tiene $x_n > M/c$. Como además $y_n > c$, entonces para $n > N$, se obtiene $x_n y_n > (M/c) \cdot c = M$.

c) Sea $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty.$$

Solución. Sea $M > 0$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tiene $|x_n| < 1/M$, es decir $M < 1/x_n$ donde usamos que $x_n > 0$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Por otra parte suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $M > 0$ suficientemente grande de modo que $\varepsilon > 1/M$ por la propiedad Arquimediana. Por $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, se tiene que $M < 1/x_n$. Luego, para n grande, tenemos $|x_n| < 1/M < \varepsilon$ de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

65. Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones tales que $x_n, y_n > 0$. Demuestre que

a) Si existe $c > 0$ tal que $x_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

b) Si $(x_n)_n$ es acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Solución. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones con $x_n, y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- a) Sea $M > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $y_n < \frac{c}{M}$. Luego, para $n \geq N$ se tiene $\frac{x_n}{y_n} > \frac{c}{y_n} > M$. De aquí se obtiene el resultado.
- b) Como (x_n) es acotada, existe $B > 0$ tal que para todo n se tiene $x_n \leq B$. Para todo n se cumple $0 \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{B}{y_n}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{y_n} = 0$. Concluimos con el Teorema del Sandwich.

66. Sea $(a_n)_n$ una sucesión tal que

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1.$$

Demuestre que el siguiente límite existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Es más, si denotamos por ω el valor del límite entonces

$$\omega n - 1 < a_n < \omega n + 1.$$

Solución. Sean $n \geq 1$ y $m \geq 1$ fijos, y escribimos $n = km + r$ con $0 \leq r < m$. Aplicando la desigualdad dada reiteradamente se obtiene $a_{km} < ka_m + (k-1)$, y luego, usando la desigualdad nuevamente,

$$a_n = a_{km+r} < a_{km} + a_r + 1 \leq ka_m + k - 1 + a_r + 1 = ka_m + a_r + k.$$

Dividiendo entre $n = km + r$, tenemos

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{ka_m + a_r + k}{km + r} = \frac{a_m}{m} \cdot \frac{km}{km + r} + \frac{a_r + k}{km + r}.$$

Tomando $k \rightarrow \infty$ (es decir, $n \rightarrow \infty$) se obtiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

Como esto vale para todo $m \geq 1$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m \geq 1} \frac{a_m}{m}.$$

De manera análoga, usando la desigualdad inferior $a_{m+n} > a_m + a_n - 1$, se obtiene

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \geq \sup_{m \geq 1} \frac{a_m - 1}{m}.$$

Tomando $m \rightarrow \infty$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} =: \omega.$$

Esto prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = \omega$ existe. Finalmente, tomando $m = 1$ en la desigualdad original:

$$a_{n+1} < a_n + a_1 + 1, \quad a_{n+1} > a_n + a_1 - 1,$$

y aplicando inducción sobre n , se obtiene $\omega n - 1 < a_n < \omega n + 1$ para todo $n \geq 1$.

67. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números positivos y sea

$$t_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}.$$

Sea

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log a_n}{n} = \alpha.$$

Demuestre que

- a) si $\alpha < \log 2$, entonces la sucesión $(t_n)_n$ converge,
b) si $\alpha > \log 2$, entonces la sucesión $(t_n)_n$ diverge.

Solución. Claramente t_n es una sucesión estrictamente creciente. Si $\alpha < \log 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\log(\log a_n) < n \cdot \log 2$ para $n \geq n_0$. O de otra forma $a_n < e^{2^n}$ para $n \geq n_0$. Por tanto

$$t_n \leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + \sqrt{e^{2^{n_0}} + \cdots + \sqrt{e^{2^n}}}}} \leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}} \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}.$$

Luego, usando el Ejemplo 1.33 tenemos

$$t_n \leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}.$$

Por tanto $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, es decir convergente. Ahora supongamos que $\alpha > \log 2$. Por hipótesis, dado $0 < \varepsilon < \alpha - \log 2$, existe n_0 tal que $\log(\log a_n) > n \cdot (\alpha - \varepsilon)$ para $n \geq n_0$. Sea $\beta := e^{\alpha - \varepsilon} > 2$, en tal caso $a_n > e^{\beta^n}$ para $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$t_n = \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + \sqrt{e^{a_n}}}} > \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + e^{\frac{\beta^n}{2^{n-n_0+1}}}}} > e^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^n},$$

y así (b_n) diverge a infinito.

68. Definimos el n -ésimo iterado de la función seno por

$$\text{sen}_1 x = \text{sen } x, \quad \text{sen}_n x = \text{sen}(\text{sen}_{n-1} x).$$

Demuestre que si $\text{sen } x > 0$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}_n x = 0.$$

Es más

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} \text{sen}_n x = 1.$$

Solución. Sea $s_1 = \text{sen } x > 0$. Denotamos $s_n = \text{sen}_n x$, y en particular, $s_{n+1} = \text{sen}(s_n)$. Primero probaremos que $s_n \rightarrow 0$. Para $t \in (0, 1]$ se cumple la desigualdad estricta $\text{sen}(t) < t$, pues la función seno es estrictamente menor que la función identidad en $(0, 1]$. En particular, si $s_n \in (0, 1]$ entonces

$$0 < s_{n+1} = \text{sen}(s_n) < s_n.$$

Como $s_1 \in (0, 1]$, por inducción los elementos de (s_n) están en $(0, 1]$ y son estrictamente decrecientes. Por tanto la sucesión converge a un límite $L \geq 0$. Tomando el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ en $s_{n+1} = \text{sen}(s_n)$ se obtiene que $L = \text{sen}(L)$, cuya única solución no negativa es $L = 0$.

En segundo lugar probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} s_n = 1$. Para t cerca de cero usamos la expansión de Taylor de orden 3 de donde $\text{sen } t = t - \frac{t^3}{6} + R(t)$ con $R(t) = O(t^5)$ cuando $t \rightarrow 0$. Es decir, existen constantes $C > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $0 < t < \delta$ entonces $|R(t)| \leq Ct^5$. Como $s_n \rightarrow 0$, existe N tal que para todo $n \geq N$ se tiene $0 < s_n < \delta$. Usando la expansión de Taylor tenemos $s_{n+1} = s_n - \frac{s_n^3}{6} + R(s_n)$. Usando la identidad algebraica

$$\Delta_n := \frac{1}{s_{n+1}^2} - \frac{1}{s_n^2} = \frac{(s_n - s_{n+1})(s_n + s_{n+1})}{s_{n+1}^2 s_n^2},$$

y sustituyendo $s_n - s_{n+1} = \frac{s_n^3}{6} - R(s_n)$, obtenemos

$$\Delta_n = \frac{\left(\frac{s_n^3}{6} - R(s_n)\right)(s_n + s_{n+1})}{s_{n+1}^2 s_n^2}.$$

Como $s_{n+1} \sim s_n$ cuando $n \rightarrow \infty$, para n grande los factores $s_n + s_{n+1}$ y $s_{n+1}^2 s_n^2$ son asintóticamente proporcionales a $2s_n$ y s_n^4 respectivamente. Más precisamente, usando la desigualdad $|R(s_n)| \leq Cs_n^5$ y que $s_{n+1} \geq s_n/2$ para n suficientemente grande (pues $s_{n+1}/s_n \rightarrow 1$), se deduce que existe una sucesión $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que

$$\Delta_n = \frac{1}{3} + \varepsilon_n.$$

Sumando las igualdades para $n = N, N+1, \dots, N+k-1$ se obtiene

$$\frac{1}{s_{N+k}^2} - \frac{1}{s_N^2} = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_{N+j} = \frac{k}{3} + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{N+j}.$$

Dividiendo por k y haciendo $k \rightarrow \infty$, como $\varepsilon_n \rightarrow 0$ la suma de los ε_n 's dividida por k tiende a 0 (por el Ejercicio 21). Por tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{s_{N+k}^2} - \frac{1}{s_N^2} \right) = \frac{1}{3},$$

lo que implica $\frac{1}{s_n^2} = \frac{n}{3} + O_{n \rightarrow \infty}(1)$. De aquí se sigue que $s_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} s_n = 1$.

69. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones de números reales. Suponga que $(b_n)_n$ es estrictamente creciente y no acotada y que el siguiente límite existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ tenemos $L - \varepsilon \leq \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} \leq L + \varepsilon$. Para $m > n \geq N$ sumando las desigualdades anteriores desde $k = n$ hasta $k = m-1$ se obtiene

$$(L - \varepsilon)(b_m - b_n) \leq a_m - a_n \leq (L + \varepsilon)(b_m - b_n).$$

Dividiendo por b_m y reordenando, usando $a_m = a_n + (a_m - a_n)$, se llega a

$$\frac{a_n}{b_m} + (L - \varepsilon) \left(1 - \frac{b_n}{b_m}\right) \leq \frac{a_m}{b_m} \leq \frac{a_n}{b_m} + (L + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_n}{b_m}\right).$$

Como $b_m \rightarrow_{m \rightarrow \infty} +\infty$ (pues (b_n) es creciente no acotada), para cada n fijo se tiene $\frac{a_n}{b_m} \rightarrow 0$ y $\frac{b_n}{b_m} \rightarrow 0$. Haciendo $m \rightarrow \infty$ en las desigualdades anteriores obtenemos

$$L - \varepsilon \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} \leq L + \varepsilon.$$

Al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

70. Sea $(a_n)_n$ la sucesión definida por

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Demuestre que a pesar de que $(a_n)_n$ es divergente, para todo $p \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = 0.$$

Solución. Dado que el límite de la suma es igual a la suma de los límites,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+p} - a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+i} = 0.$$

71. El siguiente resultado lo utiliza P. Walters en su demostración del Teorema de Oseledets [15, Lemma 1].

Demuestre que si $a_n, b_n > 0$ para $n \geq 1$ entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b_n \right\}$$

y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \geq \max \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b_n \right\}.$$

Solución. Como el logaritmo es creciente, tenemos

$$\max \left\{ \frac{1}{n} \log a_n, \frac{1}{n} \log b_n \right\} \leq \frac{1}{n} \log(a_n + b_n),$$

lo que implica la segunda desigualdad pues $\liminf_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, y_n\} \geq \max\{\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n\}$ para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Similarmente, se obtiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \geq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b_n \right\}$$

pues $\limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n\}$ para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Para concluir la igualdad en este caso, observe que debemos probar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max\{a_n, b_n\}.$$

Como

$$\frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \frac{1}{n} \log(2 \max\{a_n, b_n\}) = \frac{1}{n} \log 2 + \frac{1}{n} \log \max\{a_n, b_n\},$$

se obtiene la desigualdad deseada.

72. Construya un sucesión de números naturales $(a_n)_n$ (cero no es considerado como número natural) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \infty,$$

mientras que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} < \infty.$$

Observe que a cada sucesión de números naturales se le puede asociar, mediante la descomposición en fracciones continuas, un número real en el intervalo $[0, 1]$. Los ejemplos construidos en este ejercicio pueden entenderse como ejemplos de números reales para los que su descomposición en fracciones continuas posee las propiedades antes mencionadas. Es posible demostrar que casi todo número real en $[0, 1]$

satisface las propiedades requeridas (ver [5, p.83]).

Solución. Consideremos la sucesión $(a_n)_n$ definida por $a_{2^n} = 2^{2^n}$ y para los k que no son de la forma $k = 2^n$ definimos $a_k = 1$. Llamemos $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ y $p_n := \prod_{k=1}^n a_k$. Notemos que $\liminf_n \frac{s_n}{n}$ se alcanza en la subsucesión $\frac{s_{2^n-1}}{2^n-1}$, y que $\limsup_n \sqrt[n]{p_n}$ se alcanza en la subsucesión $\sqrt[n]{p_{2^n}}$. Entonces se tiene que

$$\frac{s_{2^n-1}}{2^n-1} = \frac{1 + \dots + 1 + (1 + 2 + \dots + 2^{2^{n-1}})}{2^n-1} \geq \frac{(2^2)^n - 1}{2^n-1} = \frac{4^n - 1}{2^n-1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Por otra parte, $\sqrt[n]{p_{2^n}} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 4 \dots 2^{2^n}} = 2^{(2^{1+2+\dots+n})/2^n} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Con esto se tiene que

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_{2^n}} = 1,$$

y por otra parte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2^n-1}}{2^n-1} = +\infty.$$

73. Construya una sucesión de números naturales $(a_n)_n$ tales que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < \infty,$$

y uno de los siguientes límites exista mientras que el otro no:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Solución. Construimos una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ con términos en $\mathbb{N}_{>0}$ por concatenación de bloques alternados $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ de la manera siguiente. Cada bloque A_k consiste únicamente en el número 2 repetido n_k veces:

$$A_k = \underbrace{(2, 2, \dots, 2)}_{n_k \text{ términos}}.$$

Cada bloque B_k consiste en la repetición m_k veces del patrón $(1, 1, 4)$:

$$B_k = \underbrace{1, 1, 4, 1, 1, 4, \dots, 1, 1, 4}_{3m_k \text{ términos}}.$$

Fijamos las longitudes (n_k) y (m_k) recursivamente para forzar dominancias alternadas. Definimos $S_0 := 0$ y $S_k := S_{k-1} + n_k + 3m_k$ para $k \geq 1$, donde (n_k) y (m_k) se definen como

$$\begin{cases} n_1 = 1, & m_1 = 1, \\ \text{para } k \geq 1: & n_{k+1} = (S_k + 1)^2, \quad m_{k+1} = 1 \quad (\text{hace que } A_{k+1} \text{ domine}), \\ \text{para } k \geq 1: & n_{k+2} = 1, \quad m_{k+2} = (S_{k+1} + 1)^2 \quad (\text{hace que } B_{k+2} \text{ domine}). \end{cases}$$

Es decir, alternativamente hacemos un bloque A muy largo (cuadrático respecto de la longitud total previa) y luego un bloque B muy largo, etc. Esto define de forma explícita todas las longitudes.

Propiedades de los bloques. Observemos que para todo bloque:

- La media aritmética de cualquier bloque A_k es

$$\frac{2 + \dots + 2}{n_k} = 2.$$

- La media aritmética de cualquier bloque B_k (longitud $3m_k$) es

$$\frac{1 + 1 + 4 + \cdots + 1 + 1 + 4}{3m_k} = \frac{6m_k}{3m_k} = 2.$$

- La media geométrica de un bloque A_k es 2; la media geométrica de un bloque B_k es

$$(1 \cdot 1 \cdot 4)^{1/3} = 4^{1/3} = 2^{2/3}.$$

En términos de logaritmos, el promedio de $\log a_j$ en A_k es $\log 2$, y en B_k es $(2/3) \log 2$.

La media aritmética converge a 2. Sea $S(n) = \sum_{j=1}^n a_j$ y considere índices n que coincidan con el extremo derecho de un bloque completo (después de concatenar varios bloques completos). Si hemos concatenado hasta el bloque B_r (es decir, $n = S_r$), entonces la suma total es la suma de las sumas de los bloques y la longitud total es S_r . Como cada bloque tiene media aritmética exactamente 2, se tiene

$$\frac{S(S_r)}{S_r} = 2.$$

Si n no coincide con el final de un bloque, entonces n está dentro de algún bloque, y la desviación de $S(n)/n$ respecto de 2 viene dada por la contribución parcial del bloque incompleto; esa contribución relativa es como mucho del orden de $\frac{\text{longitud del bloque}}{S_r + \text{longitud del bloque}}$. Pero por la elección recursiva las longitudes de los bloques tienden a infinito y dominan la longitud previa cuando se desea dominancia, por lo que las contribuciones parciales relativas tienden a 0. Formalmente: si $n \in (S_{r-1}, S_r]$ entonces

$$\left| \frac{S(n)}{n} - 2 \right| \leq \frac{C \cdot (n - S_{r-1})}{n} \leq \frac{C \cdot (S_r - S_{r-1})}{S_{r-1} + (S_r - S_{r-1})}$$

con una constante C absoluta (por ejemplo $C \leq 4$ pues los términos valen en $\{1, 2, 4\}$). Como $S_r - S_{r-1} \rightarrow \infty$ y las longitudes crecen de la forma escogida, el término de la derecha tiende a 0. Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n} = 2.$$

La media geométrica no tiene límite. Sea

$$G(n) := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_j} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log a_j\right).$$

Basta mostrar que el promedio de los $\log a_j$ no converge. Denotemos

$$L(n) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log a_j.$$

Calculemos $L(S_r)$, el promedio al final de un bloque completo (después de r bloques). La suma de los logs hasta S_r es la suma de las contribuciones de cada bloque; para cada bloque A_k la contribución media por término es $\log 2$, para cada B_k es $(2/3) \log 2$. Entonces

$$\begin{aligned} L(S_r) &= \frac{\sum_{k \leq r \text{ con } A_k} (n_k \log 2) + \sum_{k \leq r \text{ con } B_k} (3m_k \cdot \frac{2}{3} \log 2)}{S_r} \\ &= \frac{(\text{\#términos en bloques } A) \log 2 + (\text{\#términos en bloques } B) \frac{2}{3} \log 2}{S_r}. \end{aligned}$$

Sea $A_{\leq r}$ la cantidad total de términos provenientes de bloques de tipo A hasta S_r , y $B_{\leq r}$ la cantidad total de términos provenientes de bloques tipo B hasta S_r . Entonces

$$L(S_r) = \left(\frac{A_{\leq r}}{S_r} \right) \log 2 + \left(\frac{B_{\leq r}}{S_r} \right) \frac{2}{3} \log 2.$$

Por la construcción recursiva de las longitudes tenemos que, para los índices pares $r = 2k$, justo después de haber colocado un bloque A muy largo (recordar que en la definición $n_{k+1} = (S_k + 1)^2$), la proporción

$$\frac{A_{\leq r}}{S_r}$$

es arbitrariamente cercana a 1 (más exactamente, mayor que $1 - 1/(S_{r-1} + 1)$). Así, tomaremos una subsecuencia de índices r para los cuales

$$L(S_r) \rightarrow \log 2.$$

Análogamente, para los índices impares correspondientes al final de un bloque B muy largo la proporción de términos provenientes de bloques B es arbitrariamente cercana a 1, y por tanto existe otra subsecuencia de índices r' para los cuales

$$L(S_{r'}) \rightarrow \frac{2}{3} \log 2.$$

Como $\log 2 \neq \frac{2}{3} \log 2$, las dos sucesiones subsecuenciales de $L(n)$ tienden a límites distintos, luego $L(n)$ no converge. En consecuencia $G(n) = \exp(L(n))$ tampoco converge.

Conclusión. La sucesión construida satisface:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} < \infty \quad (\text{en realidad la media converge a } 2),$$

la media aritmética converge (a 2), y la media geométrica $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ no tiene límite. Además todos los a_n son enteros positivos (valen en $\{1, 2, 4\}$), por lo que cumple las condiciones pedidas.

74. El siguiente resultado aparece en [2, Lemma 3.1]. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales y sea

$$c = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Pruebe que existe una sucesión $(b_n)_n$ de números reales positivos tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(a_n - ns) = \begin{cases} \text{finito} & s > c. \\ \infty & s \leq c, \end{cases}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1.$$

Solución. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(a_n - nc) < \infty$, escogemos $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} = 1$ y $\varepsilon_k := \frac{a_{n_k}}{n_k} - c \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Considerando

$$b_n = \exp \left(n \left(\frac{n_k - n}{n_k - n_{k-1}} \varepsilon_{k-1} + \frac{n - n_{k-1}}{n_k - n_{k-1}} \varepsilon_k \right) \right),$$

para $n_{k-1} \leq n < n_k$ se puede probar lo pedido.

75. Sea $(p_n)_{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ una sucesión de términos positivos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = 0.$$

Sea $(a_n)_n$ una sucesión tal que $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. Demuestre que la sucesión definida por

$$s_n = \frac{p_n b_0 + p_{n-1} b_1 + \cdots + p_0 b_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n}$$

es tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$. Construya sucesiones $(a_n)_n$ y $(p_n)_n$, con $p_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \infty,$$

pero $(s_n)_n$ converge. Este método de sumar se denomina *Suma de Nörlund* y generaliza las sumas de Cesàro.

Solución. Denotemos $P_n := p_0 + p_1 + \cdots + p_n$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|b_k - L| < \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Ahora observemos que para cada $0 \leq k \leq K-1$, $P_{n-k} \leq P_n$, por lo tanto para $n \geq K$ tenemos que

$$\begin{aligned} |s_n - L| &= \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} (b_k - L) \right| \leq \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{K-1} p_{n-k} |b_k - L| + \frac{1}{P_n} \sum_{k=K}^n p_{n-k} |b_k - L| \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq K-1} |b_j - L| \sum_{k=0}^{K-1} \frac{p_{n-k}}{P_n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando límite superior cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene $\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n - L| \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye el resultado.

Por último construimos un ejemplo de sucesiones $(a_n)_n$ y $(p_n)_n$ con las propiedades pedidas. Sea $p_n = n+1$ con $n \geq 0$. Entonces tenemos que

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

De este modo podemos verificar que

$$\frac{p_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = \frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{2}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

por lo que se satisface la primera condición para $(p_n)_n$. Ahora definimos $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ con $n \geq 0$. Las sumas parciales de esta sucesión son

$$b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Además, se sabe que el límite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existe por el test de Leibniz. Luego, por la primera parte del teorema se tiene que la sucesión

$$s_n = \frac{p_n b_0 + p_{n-1} b_1 + \cdots + p_0 b_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = \frac{(n+1)b_0 + n b_1 + \cdots + 1 \cdot b_n}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

converge al límite $L \in \mathbb{R}$.

A continuación construiremos el ejemplo buscado. Defina la sucesión de sumas parciales (b_n) como potencias de 2:

$$b_n = 2^n, \quad \text{para } n \geq 0$$

Por lo tanto, la sucesión original (a_n) queda únicamente determinada por $a_0 = b_0 = 1$ y $a_n = b_n - b_{n-1} = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$. Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

A continuación, definimos la sucesión de pesos (p_n) ,

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_1 &= -4, \\ p_2 &= 4, \\ p_n &= 0, \quad \text{para todo } n \geq 3. \end{aligned}$$

Calculamos la sucesión de sumas parciales P_n :

$$\begin{aligned} P_0 &= p_0 = 1, \\ P_1 &= p_0 + p_1 = -3, \\ P_n &= p_0 + p_1 + p_2 = 1 - 4 + 4 = 1, \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{aligned}$$

Dado que $P_n = 1$ y $p_n = 0$ para todo $n \geq 3$, se verifica de inmediato la condición exigida sobre el decaimiento de los pesos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1} = 0$$

Evaluamos ahora la sucesión de medias de Nörlund, (s_n) . Para $n \geq 2$, debido a que $p_k = 0$ para $k \geq 3$, la sumatoria se reduce exclusivamente a tres términos, y el denominador es $P_n = 1$:

$$s_n = \sum_{k=n-2}^n p_{n-k} b_k = p_0 b_n + p_1 b_{n-1} + p_2 b_{n-2}$$

Sustituyendo las expresiones explícitas de b_k y p_k :

$$s_n = (1)2^n + (-4)2^{n-1} + (4)2^{n-2}$$

Reescribiendo los términos en base a potencias homogéneas:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 4 \cdot 2^{n-2} &= 2^2 \cdot 2^{n-2} = 2^n \\ \blacksquare \quad -4 \cdot 2^{n-1} &= -2 \cdot (2 \cdot 2^{n-1}) = -2 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión para s_n :

$$s_n = 2^n - 2 \cdot 2^n + 2^n = 0$$

Dado que $s_n = 0$ para todo $n \geq 2$, se concluye que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

Con lo que obtenemos el ejemplo con $L = 0$.

76. Construya una sucesión $(a_n)_n$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $b > 1$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b^n} = 0.$$

Solución. Considere, por ejemplo, $a_n = 2^{\sqrt{n}}$. Como $b > 1$, existe $r > 0$ de modo que $b = 2^r$, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{rn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n} - rn} = 0.$$

Antes de calcular el segundo límite, notamos que para $x_n = n^{2k}/2^n > 0$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{2k}}{n^{2k}} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1.$$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ por lo visto en el capítulo. Para calcular el límite pedido definimos $y_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Como $y_n \leq \sqrt{n} \leq y_n + 1$,

$$0 < \frac{n^k}{2^{\sqrt{n}}} \leq 2 \cdot \frac{(y_n + 1)^{2k}}{2^{y_n + 1}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^{\sqrt{n}}} = 0.$$

77. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que la sucesión $(a_n)_n$ es eventualmente decreciente. Demuestre que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ convergen o divergen simultáneamente.

Solución. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente. Sean $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ y $T_n = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$ las sumas parciales de las series. Podemos escribir,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_0 + a_1 = a_0 + T_0, \\ S_3 &= S_1 + a_2 + a_3 \leq a_0 + T_0 + a_2 + a_2 = a_0 + T_0 + 2a_2 = a_0 + T_1, \\ S_7 &= S_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq a_0 + T_1 + 4a_4 = a_0 + T_2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En general, se puede probar por inducción que $S_{2^n-1} \leq a_0 + T_{n-1}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} S_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \geq a_1 + a_2 + a_2 = a_1/2 + a_2 + a_1/2 + a_2 = a_1/2 + a_2 + T_1/2, \\ S_4 &= S_2 + a_3 + a_4 \geq T_1 + a_4 + a_4 = a_1/2 + a_2 + T_1/2 + 2a_4 = a_1/2 + a_2 + T_2/2, \\ S_8 &= S_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq a_1/2 + a_2 + T_2/2 + 4a_8 = a_1/2 + a_2 + T_3/2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por inducción, se puede probar también que $S_{2^n} \geq a_1/2 + a_2 + T_n/2$. Como las dos sucesiones son positivas, o bien las sumas parciales crecen hasta el límite, o divergen. Si la sucesión $(S_n)_n$ diverge a infinito, por la primera desigualdad, $(T_n)_n$ también. Similarmente, por la segunda desigualdad si la sucesión S_n converge, entonces $(T_n)_n$ también.

78. (Criterio de Schlömilch) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tales que la sucesión $(a_n)_n$ es eventualmente decreciente. Sea $n_0 < n_1 < \dots$ una sucesión de enteros positivos tales que, como función de k , el siguiente cociente es acotado

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}}.$$

Demuestre que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{k=1}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_k}$ convergen o divergen simultáneamente.

Solución. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los términos de la sucesión son decrecientes. Definimos $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $T_n := \sum_{k=0}^n (n_{k+1} - n_k) a_{n_k}$ y $U_n := \sum_{k=0}^n (n_k - n_{k-1}) a_{n_k}$. Notemos que

$$\begin{aligned} S_{n_1} &= S_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1} \geq S_{n_0} + (n_1 - n_0) a_{n_1} = S_{n_0} + U_1, \\ S_{n_2} &= S_{n_1} + a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2} \geq S_{n_0} + U_1 + (n_2 - n_1) a_{n_2} = S_{n_0} + U_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

En general, se puede probar por inducción que $S_{n_k} \geq S_{n_0} + U_k$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} S_{n_1-1} &= S_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots + a_{n_1-1} \leq S_{n_0-1} + (n_1 - n_0) a_{n_0} = S_{n_0-1} + T_0, \\ S_{n_2-1} &= S_{n_1-1} + a_{n_1} + \dots + a_{n_2-1} \leq S_{n_0-1} + T_0 + (n_2 - n_1) a_{n_1} = S_{n_0-1} + T_1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nuevamente, se puede probar por inducción que $S_{n_k-1} \leq S_{n_0-1} + T_{k-1}$. Por lo tanto, si S_n diverge, T_n también. De la misma forma, si U_n diverge, S_n también. Además como $(n_{k+1} - n_k)/(n_k - n_{k-1})$ es acotado, podemos aplicar el test de comparación a las dos series T_n y U_n para concluir que ambas convergen

o ambas divergen.

79. Demuestre que la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$

Solución. Utilizaremos el Criterio de Schlömilch del ejercicio anterior. Sea $n_k = k^2$, tenemos que $\frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2 - (k-1)^2} = \frac{2k+1}{2k-1} \leq 3$. Para estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$, basta estudiar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2 - k^2}{2^{\sqrt{k^2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k}$. Por el test del cuociente, observamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2(k+1)+1}{2^{k+1}}}{\frac{2k+1}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+3}{4k+2} = \frac{1}{2} < 1,$$

por lo tanto la serie converge.

80. (Criterio de Kummer) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y (d_n) una sucesión de términos positivos. Asuma que el siguiente límite existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \right) =: \rho.$$

- a) Demuestre que si $\rho > 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
b) Demuestre que si $\rho < 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Solución. Sea $\rho_n := d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}$. Para la parte a), consideremos $k := \rho/2 > 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_n \geq k$ para todo $n \geq N$, equivalentemente,

$$\frac{1}{k}(a_n d_n - a_{n+1} d_{n+1}) \geq a_n.$$

Dado $m > N$, sumando desde $n = N$ hasta $n = m$ tenemos

$$\sum_{n=N}^m a_n \leq \frac{1}{k}(a_N d_N - a_{m+1} d_{m+1}) \leq \frac{1}{k} a_N d_N.$$

Así, las sumas parciales de $\sum a_n$ están acotadas por $\sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{1}{k} a_N d_N$, y como $\sum a_n$ es una serie de términos positivos, se concluye que converge.

Para la parte b), notemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_n \leq 0$ para todo $n > N$, y por lo tanto

$$d_{n-1} - \frac{a_n}{a_{n-1}} d_n \leq 0 \implies a_n d_n \geq a_{n-1} d_{n-1} \geq \dots \geq a_N d_N.$$

Así, para $m \geq N$ tenemos $\sum_{n=N+1}^m a_n \geq a_N d_N \sum_{n=N+1}^m \frac{1}{d_n}$, y concluimos que la serie $\sum a_n$ diverge.

81. (Test de Raabe) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$. Demuestre que si $\beta > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Solución. Notemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-1}{n} - \frac{\beta_{n-1}}{n}$, por lo tanto $(n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n} n = \beta_n - 1$. Consideremos $d_n = n - 1$. Como $\sum_{n=2}^{\infty} 1/d_n$ diverge, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}) = \beta - 1 > 0$. Luego, la serie

$\sum_n a_n$ converge por el Criterio de Kummer (Ejercicio 82).

82. Investigue la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(n+1)}.$$

Solución. Sea $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(n+1)}$ para $n \geq 1$. Notamos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+2)(n+2)} = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+6n+4} = 1 - \frac{3(n+1)}{2n^2+6n+4} = 1 - \frac{3n(n+1)/(2n^2+6n+4)}{n}.$$

Sea además $\beta_n = 3n(n+1)/(2n^2+6n+4)$ para $n \geq 1$. La serie converge por el Test de Raabe (Ejercicio 83) pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{3}{2} > 1$.

83. Demuestre que si las series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ también converge.

Solución. Dado que los términos son positivos, tenemos que $a_i^2 + b_i^2 \leq a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2 = (a_i + b_i)^2$. Luego, por el Criterio de Comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

84. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente.

Solución. Este ejercicio resulta directamente de aplicar el Criterio de Comparación. Para esto basta notamos que $0 \leq |a_n|, |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

85. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

Solución. Por la desigualdad de la media aritmética-geométrica, $2\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$. Además $\sum a_n$ y $\sum a_{n+1}$ convergen, así $\sum (a_n + a_{n+1})/2$ converge. Concluimos aplicando el Criterio de Comparación.

86. Demuestre que existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que para toda sucesión $(a_n)_n$ de números positivos se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Solución. Sea $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, y $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$(n-m)^2 \leq \left(\sum_{j=m+1}^n \frac{1}{a_j} \right) \left(\sum_{j=m+1}^n a_j \right) \leq \left(\sum_{j=m+1}^n \frac{1}{a_j} \right) S_n.$$

Como $n-m \geq n/2$ obtenemos que $\frac{n^2}{4S_n} \leq \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{a_j}$. Por lo tanto $\frac{n}{S_n} \leq \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{a_j} \frac{4}{n}$ de donde podemos obtener el resultado con $K = 4$. Finalmente, notamos que cualquier constante $K \geq 4$ también satisface lo pedido.

87. Demuestre que si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es convergente entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2} a_n$$

es convergente.

Solución. Sea $q_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, con $q_0 = 0$. Estimaremos $S_N = \sum_{n=1}^N (n/q_n)^2 (q_n - q_{n-1})$ en términos de $T = \sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$. Notemos que

$$\begin{aligned}
S_N &\leq \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n q_{n-1}} (q_n - q_{n-1}) = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_{n-1}} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{q_n} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n} \\
&\leq \frac{5}{a_1} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{n}{q_n} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{q_n}.
\end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se tiene que $(\sum_{n=2}^N \frac{n}{q_n})^2 \leq \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n} \sum_{n=2}^N \frac{1}{q_n}$, y por lo tanto, $S_N \leq \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_N T} + T$. De aquí se tiene que

$$|\sqrt{S_N} - \sqrt{T}| \leq \sqrt{\frac{5}{a_1} + 2T}.$$

Por lo tanto, nuestra serie es positiva y tiene sumas parciales acotadas, entonces converge.

Referencias

1. Bressoud, David M. *A radical approach to real analysis*. Second edition. Classroom Resource Materials Series. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007, xvi+323 pp.
2. Denker, Manfred and Urbański, Mariusz. *On the existence of conformal measures*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **328** (1991), no. 2, 563–587.
3. Brillhart, J. and Morton, P. *A Case Study in Mathematical Research: The Golay-Rudin-Shapiro Sequence*. *The American Mathematical Monthly* **103** (1996), no. 10, 854–869.
4. Cano, J. *On Sequences*. *The American Mathematical Monthly* **75** (1968), no. 6, 645.
5. Einsiedler, M. and Ward, T. *Ergodic theory with a view towards number theory*. Graduate Texts in Mathematics, 259. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011, xviii+481 pp.
6. Hardy, G. H. *A course of pure mathematics*. 10th ed. Cambridge University Press, New York, 1958, xii+509 pp.
7. Lima, Elon Lages. *Curso de análise*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976, ix+344 pp.
8. Lyon, Richard and Ward, Morgan. *The Limit for e*. *The American Mathematical Monthly* **59** (1952), no. 2, 102–103.
9. Mallows, C. L. *Conway's Challenge Sequence*. *The American Mathematical Monthly* **98** (1991), no. 1, 5–20.
10. May, K. O. *Galileo Sequences, a Good Dangling Problem*. *The American Mathematical Monthly* **79** (1972), no. 1, 67–69.
11. Niven, I. and Zuckerman, H. S. *On Certain Sequences*. *The American Mathematical Monthly* **76** (1969), no. 4, 386–389.
12. Nyblom, M. A. *Some Curious Sequences Involving Floor and Ceiling Functions*. *The American Mathematical Monthly* **109** (2002), no. 6, 559–564.
13. Pólya, George and Szego, Gabor. *Problems and theorems in analysis. I. Series, integral calculus, theory of functions*. Translated from the German by Dorothee Aepli. Reprint of the 1978 English translation. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998, xx+389 pp.
14. Recaman, B. *Questions on a Sequence of Ulam*. *The American Mathematical Monthly* **80** (1973), no. 8, 919–920.
15. Walters, Peter. *A dynamical proof of the multiplicative ergodic theorem*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), no. 1, 245–257.

Capítulo 2

Funciones Reales

Algunos de los siguientes ejercicios aparecen en los textos de Bressoud [3], Courant y John [7], Gelbaum y Olmsted [10], Hardy [11], Lima [14], Shakarchi [21], y en los textos de la Universidad Católica de Valparaíso [23] y de Zegarra [26].

1. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Demuestre que,

a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$.

b) Si $M \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Solución.

a) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales que converge a a . Por álgebra de límites de sucesiones,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = L \cdot M.$$

Como $(x_n)_n$ es una sucesión arbitraria, el resultado se deduce del Teorema 2.5 que relaciona límites de funciones con límites de sucesiones.

b) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales que converge a a . Por álgebra de límites de sucesiones, usando que $M \neq 0$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{L}{M}.$$

Como $(x_n)_n$ es una sucesión arbitraria, el resultado se deduce del Teorema 2.5 que relaciona límites de funciones con límites de sucesiones.

2. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$$

Solución. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $|\sin x| \leq |x|$, luego concluimos que $\lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0$. De aquí se puede verificar que $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$. Luego, por álgebra de límites,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sin a \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos a) = \sin a.$$

3. Calcular

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin^3(x)}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2/3} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$$

Solución. a) Primero notamos que

$$\frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \frac{(1/\cos x) - 1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{1}{(\cos x)(1 + \cos(x))}.$$

Luego obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\cos x)(1 + \cos(x))} = \frac{1}{2}.$$

b) Como la función es continua, basta reemplazar $x = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2/3} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = 0.$$

4. Calcule los siguientes límites, donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}.$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}.$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}.$$

g)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 \arcsin x / 3}{\sin^3 2x \cos^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x + \sin x - 2}{\sin^2 x - 4 \sin x + 3}.$$

h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos^2 x}}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin \sqrt{1 + 1/x} - \sin \sqrt{1/x} \right).$$

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

j)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/8} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \pi/8)}.$$

k)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x) - \sin(\pi x) \cos(\pi x)}{x^2 \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}.$$

l)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}.$$

m)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x\sqrt[n]{a} - 1), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\log x - \log a}.$$

n)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{\frac{a+x}{a-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}.$$

Solución.

a) Para el primer límite observemos que

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3} = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x+x^3} - \frac{\sqrt[4]{1-2x} - 1}{x+x^3}.$$

Para el primer término, usamos $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Tenemos

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x+x^3} = \frac{(1+x^2) - 1}{x(1+x^2)[(\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1]} = \frac{x}{(1+x^2)[(\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1]},$$

que tiende a 0 cuando $x \rightarrow 0$. Para el segundo término, usamos $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{1-2x} - 1}{x+x^3} &= \frac{(1-2x) - 1}{x(1+x^2)[(\sqrt[4]{1-2x})^3 + (\sqrt[4]{1-2x})^2 + \sqrt[4]{1-2x} + 1]} \\ &= \frac{-2}{(1+x^2)[(\sqrt[4]{1-2x})^3 + (\sqrt[4]{1-2x})^2 + \sqrt[4]{1-2x} + 1]}, \end{aligned}$$

que tiende a $-\frac{1}{2}$ cuando $x \rightarrow 0$. Así,

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Para el segundo límite, factorizando el denominador y simplificando, podemos usar la continuidad de $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ en $x = a$ para obtener

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

b) Para el primer límite, usamos la factorización $x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)$ para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1} = \frac{m}{n},$$

donde en el segundo paso usamos la continuidad de $\frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1}$ en $x = 1$.Para el segundo límite, como $\frac{1}{1-1/x} = \frac{x}{x-1}$ es una función continua en $x = 0$ tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - 1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - 1} = 0.$$

- c) Para el primer límite, reescribimos $\frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3} \frac{\sin(2x)}{2x}$, usamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$ por el Ejercicio 2.11, de donde obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{2}{3}.$$

Para el segundo límite usamos que $\sin(\pi x) = -\sin(\pi(x-1))$. Ahora como $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(x-1)} = 1$ por el Ejercicio 2.11, y además la función $x+1$ es continua en $x=1$, obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi} \frac{\pi(x-1)(x+1)}{\sin(\pi(x-1))} = \frac{2}{\pi}.$$

- d) Para el primer límite, usamos la fórmula de la diferencia de senos en el numerador y obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{2}{x-a} \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \sin \left(\frac{x-a}{2} \right) \right).$$

Ahora reescribiendo este límite y usando $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{x-a}{2}} \sin \left(\frac{x-a}{2} \right) = 1$ resulta que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$$

Para el segundo límite, desarrollamos la expresión usando la fórmula de $\sin(2x+x)$, $\sin(2x)$, y $\cos(2x)$ para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x \cos x}{\cos(2x)}}{\sin(2x) \cos x + \sin x \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x \cos x}{\cos(2x)}}{2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)}.$$

Desarrollando y usando que $\frac{2 \cos x}{\cos(2x)(3 \cos^2 x - \sin^2 x)}$ es continua en $x=0$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x \cos x}{\cos(2x)}}{2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{\cos(2x)(3 \cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{2}{3}.$$

- e) Para el primer límite, usamos la fórmula $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Para el segundo límite, usamos $1 - \cos x = (1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})$. Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- f) Para el primer límite, usamos $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ y $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi/2 - x}{\sin(\pi/2 - x)} \cos(\pi/2 - x) = 1.$$

Para el segundo límite, observemos que

$$\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{x^2(\cos mx + \cos nx)} = \frac{\sin^2 nx - \sin^2 mx}{x^2(\cos mx + \cos nx)}.$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos mx + \cos nx} \right) \left(n^2 \left(\frac{\sin nx}{nx} \right)^2 - m^2 \left(\frac{\sin mx}{mx} \right)^2 \right) = \frac{n^2 - m^2}{2}.$$

- g) Para el primer límite, primero notamos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x/3)}{x/3} = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Luego obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 \arcsin(x/3)}{\sin(2x)^3 \cos^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{24 \cos^2(x)} \cdot \frac{(2x)^3}{\sin(2x)^3} \cdot \frac{\arcsin(x/3)}{x/3} = \frac{5}{24}$$

Para el segundo límite, simplificamos y usamos la continuidad de $\frac{2}{\sin x - 3}$ en $x = \frac{\pi}{2}$ para obtener

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \sin x - 2}{\sin^2 x - 4 \sin x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2(\sin x - 1)}{(\sin x - 1)(\sin x - 3)} = -1.$$

- h) Para el primer límite, usamos $(\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos^2 x})(\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos^2 x}) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos^2 x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos^2 x}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Para el segundo límite, utilizando que $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ y que $|\sin x| \leq |x|$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \sin \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sin \sqrt{\frac{1}{x}} \right| &= 2 \left| \sin \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{2} \right) \right| \cdot \left| \cos \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{2} \right) \right| \\ &\leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + 1}, \end{aligned}$$

y el lado derecho tiende a cero cuando $x \rightarrow 0^+$. Así, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sin \sqrt{\frac{1}{x}} = 0.$$

- i) Para el primer límite, desarrollamos la expresión y usamos la continuidad de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ en $x = 0$ para obtener,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0.$$

Para el segundo límite, amplifcamos la fracción por $1 + \cos x$ y usamos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

- j) Para el primer límite, usamos el cambio de variable $z = x - 1$,

$$\frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = \frac{(z+1)^{n+1} - (n+1)(z+1) + n}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^k = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{k-2} \quad (2.1)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{k-2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para el segundo límite, amplificamos por $(x - \frac{\pi}{8})$ y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \pi/8} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \pi/8)} = \lim_{x \rightarrow \pi/8} \frac{(x - \pi/8)}{\sin(x - \pi/8)} \frac{1 - 2 \cos x}{(x - \pi/8)}.$$

Sin embargo el límite por la derecha es $\lim_{x \rightarrow \pi/8^+} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \pi/8)} = -\infty$ y el límite por la izquierda es $\lim_{x \rightarrow \pi/8^-} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \pi/8)} = +\infty$, por lo tanto el límite no existe.

k) Para el primer límite, usando $(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x) = 1 - \cos^2 \pi x = \sin^2 \pi x$, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x (1 - \cos \pi x)}{x^2 \sin x} = \pi^3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \cos \pi x} = \frac{\pi^3}{2}.$$

Para el segundo límite, usando la continuidad del logaritmo, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{1/x} = \log \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right).$$

Haciendo el cambio de variable $x = 1/y$,

$$\log \left(\lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1+x)^{1/x} \right) = \log \left(\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right) = \log e = 1.$$

l) Para el primer límite, observemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x},$$

cuando ambos límites existen. Vamos a probar que $\lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1)/x = \log a$. Como $a^x = e^{x \log a}$ consideramos el cambio de variable $z = e^{x \log a} - 1$. Luego el límite pedido pasa a ser

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \log a}{\log(z+1)} = \log a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\log(z+1)} = \log a,$$

utilizando el segundo límite de la parte k). Finalmente, concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b = \log(a/b).$$

Para el segundo límite, consideramos el cambio $y = x - \sin x$. Usando el límite auxiliar del segundo límite de la parte l), tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x - \sin x} - 1}{(x - \sin x)e^{-\sin x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-\sin x}} = \log e \cdot 1 = 1.$$

m) Para el primer límite, observamos que cuando $a = 1$, la función es constante igual a cero, y por lo tanto tiene límite 0. Para el caso $a > 1$, cuando $x \rightarrow 0^+$, tenemos que $a^{1/x}$ crece mucho más rápido que $1/x$, y por lo tanto $xa^{1/x} \rightarrow \infty$. Por otro lado, cuando $x \rightarrow 0^-$ tenemos que $1/x \rightarrow -\infty$ y $a^{1/x} \rightarrow 0$. Así, los límites laterales no coinciden, y por lo tanto el límite no existe. El argumento para el caso $0 < a < 1$ es similar, y también obtenemos que el límite no existe.

Para el segundo límite, usamos el cambio $y = x/a - 1$ y el límite $\lim_{y \rightarrow 0} \log(y+1)/y = 1$ de la parte k). Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\log x - \log a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\log(x/a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x/a-1)a}{\log(x/a)} = a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(y+1)} = a.$$

n) Para el primer límite, vamos a calcular el límite del logaritmo de la función. Observemos que

$$\log \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{1}{3} \left(\log(1+x/a) - \log(1-x/a) \right) = \frac{\log(1+x/a)}{x/a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{\log(1-x/a)}{-x/a} \cdot \frac{1}{a},$$

que tiende a $2/a$ cuando x tiende a 0, pues $\lim_{u \rightarrow 0} \log(1+u)/u = 1$. Así, el límite buscado es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = e^{2/a}.$$

Para el segundo límite, dado que $\sqrt[3]{\frac{a^x+b^x}{2}} = \exp\left(\frac{1}{3} \log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$, el límite L que buscamos, si existe, satisface $\log L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x-1}{x} = \log b$ de acuerdo a la solución de la parte (l), tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x} = \log a + \log b.$$

Como $\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \log\left(1 + \frac{a^x+b^x-2}{2}\right)$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1$, se concluye que $\log L = \frac{\log a + \log b}{2}$. Y por tanto el límite pedido es $L = \sqrt{ab}$.

5. Demuestre que los siguientes límites no existen

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}.$$

Solución. Supongamos por contradicción en ambos casos que los límites existen y son iguales a L . En el primer caso, usando álgebra de límites, tenemos que

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) = L \cdot 0 = 0.$$

Esta contradicción implica que el límite no existe. En el segundo caso, el límite tampoco existe pues de otra forma

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x} \cdot x \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) = L \cdot 0 = 0.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin^2 \left(\frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{1}{x}.$$

Solución. Primero notamos que si $x_k = (\pi/2 + 2k\pi)^{-1}$ entonces $\sin(1/x_k) = 1$. Para probar que el primer límite no existe es suficiente verificar que la sucesión $(1/x_k) \sin^2(1/x_k)$ diverge, lo cual sigue de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k} \sin^2 \frac{1}{x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\pi/2 + 2k\pi) = +\infty.$$

En segundo lugar, notamos que si $x_k = (2\pi + 2k\pi)^{-1}$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\tan(1/x_k) = 0$, y así $\lim_{k \rightarrow \infty} \tan(1/x_k) = 0$. Por otra parte, si $y_k = (\pi/4 + 2k\pi)^{-1}$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\tan(1/y_k) = 1$, y así $\lim_{k \rightarrow \infty} \tan(1/y_k) = 1$. Por lo tanto el segundo límite tampoco existe.

6. Calcule

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} \right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^{x+3}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 5x}{\pi x}.$$

Solución.

a) Para el primer límite, usando la fórmula para diferencia de senos, se tiene que

$$\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \cos \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right).$$

Como $|\cos(y)|$ esta acotada uniformemente por 1. Y por otra parte, usando que $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, obtenemos que $\sin \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Usando la fórmula para $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$ escrita al inicio, se obtiene que el límite pedido es 0.

Para el segundo límite, cuando $x \rightarrow +\infty$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/e^{2x}}{1 + 1/e^{2x}} = 1.$$

b) Para el primer límite, usaremos que para u lo suficientemente pequeño tenemos que $1 - \frac{u^2}{2} \cos u \leq 1$.

Usando $u = \frac{a}{x}$ tenemos que $1 - \frac{a^2}{2x^2} \leq \cos(a/x) \leq 1$. Luego, tomando logaritmo y multiplicando por un valor x que asumimos positivo, sin pérdida de generalidad, obtenemos que

$$x \log \left(1 - \frac{a^2}{2x^2} \right) \leq x \log(\cos(a/x)) \leq 0.$$

Luego, usando el límite $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1$ para concluir que $x \log(\cos(a/x)) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Tomando la exponencial en este límite concluimos que el límite pedido es 1.

Para el segundo límite, cuando $x \rightarrow +\infty$ se tiene que

$$\left(\frac{x+3}{x-3} \right)^{x+3} = \left(1 + \frac{6}{x-3} \right)^{x-3} \left(1 + \frac{6}{x-3} \right)^6 \rightarrow e^6 \cdot 1 = e^6.$$

c) Para el primer límite, partimos escribiendo la fracción como $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}}}$. Además el

término en el denominador satisface $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. De aquí se obtiene que el límite pedido es 1.

Para el segundo límite, como $\cos(5x)$ es acotada y $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/\pi x = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 5x}{\pi x} = 0$.

7. Calcule el siguiente límite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} \cdot 2^{\sin(\frac{\pi}{x})} \right).$$

Solución. Como $\sin$ es una función acotada, entonces $2^{\sin(\frac{\pi}{x})}$ también lo es. Además $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, luego el límite lateral es igual a cero.

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona y acotada. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ existen los límites laterales.

Solución. Supongamos sin pérdida de generalidad que la función f es creciente. Sea $L = \inf\{f(x) : x > a\}$. Afirmamos que $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ el número $L + \varepsilon$ no es cota inferior de $\{f(x) : x > a\}$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $L \leq f(a + \delta) < L + \varepsilon$. Como f es creciente, si $a < x < a + \delta$ entonces $L \leq f(x) \leq L + \varepsilon$. Con lo que probamos la afirmación en el caso de límites por la derecha para funciones crecientes. Los casos restantes se pueden probar similarmente.

9. Construya un ejemplo de una función monótona y acotada que no tenga límite en un punto dado $a \in \mathbb{R}$.

Solución. Basta considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a \\ -1 & \text{si } x \leq a, \end{cases}$$

puesto que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$.

10. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Asuma que f es acotada superiormente y que si $x < y < a$ entonces $f(x) \leq f(y)$. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

existe.

Solución. Notamos que la función f restringida al intervalo $[a-1, a)$, la cual denotamos por $f|_{[a-1, a]}$, es acotada, pues $f(a-1) \leq f(x)$ para todo $x \in [a-1, a)$, y además f es acotada superiormente. Por lo tanto $f|_{[a-1, a]}$ es una función monótona y acotada, luego sus límites laterales existen por el Ejercicio 8. En particular el límite por la izquierda de $f|_{[a-1, a]}$ en a existe. Para concluir recordamos que por definición el límite por la izquierda de f en a es igual a este.

11. Determine para qué valores a y b la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución. Notamos que la función f es continua en cada uno de los 3 intervalos donde esta definida. Por lo tanto, es suficiente determinar los valores de a y b de modo que f sea continua en $x = 0$ y $x = 1$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \sin ax}{ax} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x+1}{x+2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+b = 1+b,$$

es necesario y suficiente que $a = 1/2$ y $b = 0$ para que la función f sea continua en $x = 0$ y en $x = 1$, y por lo tanto, en todo $\mathbb{R}$.

12. Determine para qué valores $x \in \mathbb{R}$ la siguiente función es continua

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ \sin x & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Solución. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Como $x_n \in \mathbb{Q}$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Por lo tanto, como la función sen es continua, la función f es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen } a = 0$. Es decir, f es continua en los puntos de la forma $a = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

13. Determine para qué valores $x \in \mathbb{R}$ la siguiente función es continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Solución. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Por otra parte, si $(y_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a^2 - 1$. Luego, la función f es continua en el conjunto de valores $\{-1, 1\}$.

14. Determine para qué valores $x \in \mathbb{R}$ la siguiente función es continua

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es irracional o } x = 0, \\ 0 & \text{si } x = p/q \text{ es racional, } p \text{ y } q \text{ son relativamente primos y } q > 0. \end{cases}$$

Solución. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Luego, la función f solo es continua en $x = 0$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} q & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } x = p/q; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

donde el número racional p/q se asume escrito de modo que p y q no tengan factores comunes y tal que $q > 0$. Demuestre que f no es acotada en ningún intervalo y estudie su continuidad.

Solución. Sean $I = (a, b)$ y $q \in \mathbb{N}$ tal que $1/q < (b-a)/2$. Consideremos el conjunto $C_q := \{p/q : p \in \mathbb{Z}\}$. Notamos que $C_q \cap I \neq \emptyset$. En efecto, si la intersección fuera vacía, entonces $I \subset (p/q, (p+1)/q)$ para algún $p \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $b-a < 1/q$. Esta contradicción prueba la afirmación. Para $x \in C_q \cap I$ se tiene que $f(x) = q$. Por la propiedad Arquimediana existe $q \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande tal que $1/q < (b-a)/2$. Por lo tanto la función f no es acotada en (a, b) . Ahora, como toda función continua es localmente acotada tenemos que f no puede ser continua en ningún punto de su dominio.

16. Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2(\pi x)},$$

es continua.

Solución. Si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $\cos^2(\pi x) = 1$, y luego $f(x) = 0$. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ entonces $\cos^2(\pi x) \in (0, 1)$, y así $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2(\pi x)} = 1$. Luego, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ entonces nuevamente $f(x) = 0$. Hemos probado que la función f es idénticamente cero y por lo tanto continua en todo $\mathbb{R}$.

17. Construya una función continua que no es monótona en ningún intervalo (ver [10, p.29].)

Solución. Sea $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f_1(x) = |x|$ para $|x| \leq 1/2$ y $f_1(x+n) = f_1(x)$ para todo real x y n entero. También consideramos $f_n(x) = 4^{-(n-1)} f_1(4^{n-1}x)$ para todo n natural. Ahora definimos la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

Como para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}$$

La serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y por lo tanto la función f es continua. Para no hacer uso del test M de Weierstrass, verificaremos este hecho directamente ,

Sea $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2 \cdot 4^{n-1} < \varepsilon/2$. Como la función valor absoluto es continua más la desigualdad triangular,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x+h) - f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x+h) - f_n(x)| + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

Por la continuidad de f_n sabemos que existe δ tal que $|h| < \delta$ implica $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \varepsilon/2N$ para $1 \leq n \leq N$. Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x+h) - f_n(x)| + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}} \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego, la función f es continua. Probaremos ahora que f no es monótona en ningún intervalo.

Sean $k, m \in \mathbb{N}$ y $a = k \cdot 4^{-m}$. Note que $f(a) = f_1(a) + \dots + f_m(a)$. Considere $h_m = 4^{-2m-1}$, entonces $f_n(a+h_m) = 0$ para $n > 2m+1$ y luego

$$f(a+h_m) - f(a) = \sum_{i=1}^m (f_i(a+h_m) - f_i(a)) + \sum_{i=m+1}^{m+1} f_{m+1}(a+h_m) \geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

Análogamente se obtiene que

$$f(a-h_m) - f(a) \geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

Por último basta notar que el conjunto de números de la forma $k \cdot 4^{-m}$ es denso en $\mathbb{R}$. Por lo tanto f no es monótona en ningún intervalo.

18. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función que sólo posee discontinuidades de primera especie. Demuestre que el conjunto de puntos donde f es discontinua es numerable.

Solución. Como la función f solo posee discontinuidades de primera especie, para todo $x \in X$ existe $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$. Sea $\sigma : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $\sigma(x) := |f(x) - \lim_{y \rightarrow x} f(y)|$. Notamos que $\sigma(x) > 0$ si y solo si la función f es discontinua en el punto x . Así el conjunto de discontinuidades de f , que denotamos por D , se puede escribir como

$$D = \cup_n D_n, \quad \text{donde} \quad D_n := \{x \in X : \sigma(x) \geq 1/n\}.$$

Para finalizar basta probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto D_n es numerable. Probaremos que D_n es un conjunto de puntos aislados y por lo tanto numerable. Sea $a \in D_n$, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe tenemos que para $\varepsilon = 1/4n$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ entonces, $|f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)| < 1/4n$. En particular, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ se tiene que $\sigma(x) < \frac{1}{4n}$. Luego $D_n \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$. Es decir, D_n es un conjunto de puntos aislados y por lo tanto numerable. Luego D también es numerable.

19. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona, demuestre que el conjunto de puntos donde f es discontinua es numerable.

Solución. Sin pérdida de generalidad suponemos que f es una función creciente. Denotemos por D el conjunto de discontinuidades de f . Definiremos una función inyectiva $F : D \rightarrow \mathbb{Q}$, luego, como el conjunto de los números racionales es numerable concluiremos que D también lo es.

Como la función f es monótona para cada $a \in D$ existen los límites laterales. Consideremos el intervalo $(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x))$ y sea

$$q_a \in \mathbb{Q} \cap (\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x))$$

un número racional arbitrario. Notamos que el intervalo $(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x))$ es no trivial pues $a \in D$. Luego, definimos $F(a) = q_a$. Además, como f es monótona, si $a, b \in D$ y $b < a$ entonces

$$\left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) \right) \cap \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right) = \emptyset.$$

Por lo tanto la función $F : D \rightarrow \mathbb{Q}$ es inyectiva, lo que prueba el resultado.

20. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto numerable arbitrario. Construya una función monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que el conjunto de puntos donde f es discontinua sea igual a A .

Solución. Consideremos la sucesión de funciones $(f_n)_n$ definida por,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

Sea $A = (a_n)_n$ una numeración del conjunto A . Afirmamos que la función $f(x) = \sum_n f_n(x - a_n)$ es monótona y su conjunto de discontinuidades coincide con A .

Notemos, en primer lugar, que la función está bien definida ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(x) = \sum_n f_n(x - a_n) \leq \sum_n 1/n^2 < \infty.$$

Además como cada función $f_n(x - a_n)$ es creciente y positiva, entonces la función f también es creciente y positiva. Ahora probaremos que f es discontinua en todos los elementos de A . En efecto, notamos que si $x < a_n < y$, entonces $f(y) - f(x) > 1/n^2$. Esto implica que

$$\lim_{x \rightarrow a_n^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_n^-} f(x) > 1/n^2.$$

Por lo tanto, la función f es discontinua en $x = a_n$.

Ahora, sea $x \in \mathbb{R} \setminus A$ y $\varepsilon > 0$. Consideramos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} 1/n^2 < \varepsilon$. Para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ tal que $I := (x - \delta, x + \delta)$ no contiene a ningún elemento de $\{a_1, \dots, a_N\}$. Luego en tal intervalo cada función de la forma $f_n(x - a_n)$ es constante para $n = 1, \dots, N$. Luego, para todo $y, z \in I$ se tiene

$$|f(y) - f(z)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} 1/n^2 < \varepsilon.$$

Es decir, la función f es continua para todo número $x \in \mathbb{R} \setminus A$.

21. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para todo $x, t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(tx) = tf(x). \quad (2.2)$$

Demuestre que la función f es continua y describa todas las funciones satisfaciendo (2.2).

Solución. Por la propiedad (2.2) de la función f tenemos que $f(x) = xf(1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} xf(1) = x_0 f(1) = f(x_0).$$

Por lo tanto f es continua. Además, como $f(x) = xf(1)$, se tiene que las funciones que cumplen la propiedad (2.2) son lineales. Por otra parte toda función lineal puede escribirse de esta forma. En conclusión, estas son todas las funciones satisfaciendo esta propiedad.

22. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es *monótona a pedazos* si existe una partición del intervalo $\{a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ tal que f es monótona en cada uno de los intervalos (x_i, x_{i+1}) . Demuestre que si f es monótona a pedazos y satisface la propiedad del valor intermedio entonces es continua.

Solución. En primer lugar probaremos que toda función monótona que satisface la propiedad del valor intermedio es continua. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la función $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y satisface la propiedad del valor intermedio. Asumamos, por contradicción, que existe un punto c donde la función no es continua. Observemos que esta discontinuidad no puede ser infinita, pues esto contradice la propiedad del valor intermedio. Ahora, como la función es monótona y acotada, por el Ejercicio 8 existen los límites laterales. Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) < \lim_{x \rightarrow c^+} g(x).$$

Sea $d \in (\lim_{x \rightarrow c^-} g(x), \lim_{x \rightarrow c^+} g(x))$ tal que $d \neq g(c)$. Como g es monótona tenemos que para todo $x \in (a, b)$ se tiene que $g(x) \neq d$. Es decir, no satisface la propiedad del valor intermedio. Esta contradicción prueba la afirmación. Aún más, la función es continua en los extremos del intervalo, es decir en $x = a$ y $x = b$. En efecto, notemos que el siguiente límite existe $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = L$. Si, $g(b) > L$ entonces la propiedad del valor intermedio no se satisface para $d \in (L, g(b))$. Notemos que como g es creciente no podemos tener que $g(b) < L$. Luego g es continua en $[a, b]$. Por lo tanto la función f es continua en todo intervalo de la forma $[x_i, x_{i+1}]$. Probaremos ahora que la función f es continua también en los bordes de los intervalos, es decir en los puntos de la partición $\{a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Notemos que los límites laterales existen y en virtud de lo anterior:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) = f(x_i) \quad \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) = f(x_i)$$

Con lo que se tiene que f es continua en x_i .

23. Construya una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que no sea continua y que satisfaga $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Si tomamos $x = y = 0$, necesariamente se tiene que $f(0) = 2f(0)$, por lo tanto $f(0) = 0$. Además, para $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $f(n) = f(1 + \dots + 1) = nf(1)$. Por otro lado, para $q \in \mathbb{N}$, $f(1) = f(1/q + \dots + 1/q) = qf(1/q)$, de donde $f(1/q) = f(1)/q$. En general, para un número racional positivo m/n con $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(m/n) = f(1/n + \dots + 1/n) = mf(1/n) = mf(1)/n$. Finalmente, observamos que $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, lo que implica que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Concluimos que $f(r) = rf(1)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. En particular, toda función continua que satisfaga $f(x+y) = f(x) + f(y)$ debe ser necesariamente de la forma $f(x) = Kx$. Este resultado fue probado por Cauchy en 1821. Es más, es posible probar que si f es monótona o si está acotada (en algún intervalo), entonces f también es de la forma $f(x) = Kx$.

Sin embargo, Hamel en 1905 probó que existen funciones que satisfacen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y que no son de la forma $f(x) = Kx$. Estas soluciones tienen la particularidad de que el gráfico de $f(x)$ es denso en $\mathbb{R}^2$. La construcción estricta de estas funciones excede el nivel de este texto, pero indicaremos cómo se procede. Sea $B \subset \mathbb{R}$ una base de Hamel de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, es decir, todo número real puede escribirse de manera única como $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ donde $\{x_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto finito de B y $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. De manera análoga al caso racional, la linealidad sobre $\mathbb{Q}$ nos permite sacar los escalares racionales. Como cada

$x \in \mathbb{R}$ se escribe de manera única en la base B , tenemos que

$$f(x) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} f(\lambda_i x_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i).$$

Para construir la función buscada, basta definir arbitrariamente los valores de $f(x_i)$ para los elementos de la base. Si se eligen de manera que no sean todos proporcionales a sus respectivos x_i , se obtiene una función aditiva que no es de la forma $f(x) = Kx$ y, en consecuencia, es discontinua en todo punto.

24. Demuestre el Teorema de Weierstrass utilizando el resultado que afirma que toda sucesión monótona y acotada es convergente. La idea de esta demostración es debida a Fort y puede encontrarse en [8].

Solución. Queremos probar que toda función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo y mínimo. Demostraremos solo el máximo (el mínimo es análogo aplicándolo a $-f$). Como f es continua en un intervalo cerrado, es acotada por la Proposición 2.1. Así, $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ está bien definido. Queremos probar que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = M$.

Por la definición de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a, b]$ tal que

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

Así, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$. Por otra parte, la sucesión (x_n) es acotada, y se puede probar que toda sucesión acotada posee una subsucesión monótona. Sea (x_{n_k}) tal sucesión monótona. Como esta subsucesión es además acotada, converge a algún $x_0 \in [a, b]$. Por la continuidad de la función f , se tiene

$$f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M.$$

25. Construya una función continua que posea máximos locales estrictos en el conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Solución. Consideremos la partición de $[0, 1]$ dada por $\{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$. En cada uno de estos intervalos definiremos la función f de modo que sea creciente y lineal en el intervalo $(\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n})$, y decreciente y lineal en $(\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)})$. Notamos que $x = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ es el punto medio del intervalo $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$.

Definimos f restringida al intervalo $[\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n})$ como una función lineal tal que $f(\frac{2n+1}{2n(n+1)}) = 2 - \frac{2}{n}$ y $f(\frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n}$. Por otra parte, definimos f restringida al intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)})$ como una función lineal tal que $f(\frac{2n+1}{2n(n+1)}) = 2 - \frac{2}{n}$ y $f(\frac{1}{n+1}) = 2 - \frac{1}{n+1}$. Además definimos $f(0) = 2$, y f restringida al intervalo $[1, 2]$ linealmente con $f(1) = 1$ y $f(2) = 0$. Esto define una función continua en el intervalo $[0, 2)$. Además se puede verificar que la función también es continua en $x = 0$.

La función continua f posee un máximo local estricto en cada punto de la forma $x = 1/n$. Además dado que los máximos en $x = 1/n$ toman el valor $f(1/n) = 2 - 1/n$, tenemos que $f(0) = 2$ también es un máximo estricto local.

26. Demuestre que el conjunto de máximos locales estrictos de una función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es a lo más numerable (ver [15]).

Solución. Consideremos el conjunto de intervalos abiertos con extremos racionales,

$$\mathcal{B} := \{(a, b) \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Para cada máximo local estricto $x \in \mathbb{R}$ de f sea $(a_x, b_x) \in \mathcal{B}$ un intervalo tal que $x \in (a_x, b_x)$ y si $y \in (a_x, b_x) \setminus \{x\}$ entonces $f(y) < f(x)$. El resultado se obtiene notando que la correspondencia

$x \mapsto (a_x, b_x)$ es uno a uno, y el conjunto $\mathcal{B}$ es numerable.

27. Construya una función continua que posea máximos locales en el conjunto de los números racionales (ver [7]).

Solución. Sea $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de los números racionales $\mathbb{Q}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) := 1 - \min\{1, |x|\}.$$

Notemos que la función g es continua, tiene un máximo en $x = 0$ y es igual a cero para todo $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. En el intervalo donde g no es nula, su gráfico es un triángulo isósceles. Consideremos ahora la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x), \quad g_n(x) := A_n g\left(\frac{x - q_n}{w_n}\right).$$

Los números reales positivos A_n y w_n se especificarán más adelante. Notemos que si $|x - q_n| > w_n$ entonces $g_n(x) = 0$. Además, la función g_n posee un máximo en $x = q_n$. Denotaremos por $I_n := [q_n - w_n, q_n + w_n]$ el intervalo donde la función g_n es positiva y lo llamaremos *intervalo asociado a g_n* . Denotaremos por

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x),$$

a la n -ésima suma parcial en la definición de la función f . Asumiremos las siguientes condiciones:

- a) La constante A_n es tal que $0 < A_n < 2^{-n}$.
- b) Los extremos del intervalo I_n no son números racionales.
- c) Si $j < n$ entonces o bien
 - 1) tenemos que $q_n \notin I_j$ y la constante w_n se escoge de modo que $I_n \cap I_j = \emptyset$, o bien
 - 2) tenemos que $q_n \in I_j$ y la constante w_n se escoge de modo que I_n esté estrictamente contenido en la mitad del intervalo de I_j al que q_n pertenece. Por ejemplo, si $q_j - w_j < q_n < q_j$ entonces $q_j - w_j < q_n - w_n < q_n + w_n < q_j$.

Inductivamente escogemos las constantes A_n y w_n de modo que se satisfagan las condiciones (1), (2) y (3). En la segunda parte de la construcción, algunas de estas constantes serán modificadas, pero seguirán satisfaciendo las condiciones aquí establecidas.

Lemma 2.1 La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es continua.

Demostración. En efecto, notemos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es normalmente convergente (y en particular uniformemente convergente) ya que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} A_n < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 < \infty.$$

Por lo tanto, la función f es continua. Este resultado sólo depende de las constantes $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y no de la elección de w_n .

En lo que sigue construiremos por inducción la sucesión de funciones f_n . Recordemos que f_n es la suma de funciones g_j que, cuando no nulas, poseen un gráfico triangular. Sean A_1 y w_1 constantes satisfaciendo (1), (2) y (3) y, por lo tanto, definiendo f_1 . Construiremos la función f_n de modo tal que:

- i) posea un máximo local estricto en q_n , ya que es lineal y creciente en $(q_n - w_n, q_n)$ y lineal y decreciente en $(q_n, q_n + w_n)$;
- ii) si $I_n \subset I_j$ entonces $j < n$ y $f_n(q_n) < f_j(q_j)$.

Supongamos que la función f_{n-1} se ha definido satisfaciendo las condiciones i) y ii). Si $I_n \cap I_j = \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ entonces mantenemos la elección de A_n y w_n obtenida en la primera parte de la construcción. Caso contrario, sea $h \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ el mayor entero tal que $q_n \in I_h$. En virtud de la condición (3b), tenemos que $I_n \subset (q_h - w_h, q_h)$ o $I_n \subset (q_h, q_h + w_h)$. Por otra parte, como $f_h(q_n - w_n) < f_h(q_h)$, la constante A_n puede escogerse de modo tal que $f_n(q_n) < f_h(q_h)$. Ahora, si $q_h \in I_j$ para $j < h$, entonces $I_h \subset I_j$ y luego por ii) tenemos que $f_h(q_h) < f_j(q_j)$, de donde $f_n(q_n) < f_j(q_j)$ y por lo tanto se satisface ii). Una vez fijado A_n , podemos escoger w_n de modo que i) se satisfaga. Para ello, basta notar que, como las pendientes máximas y mínimas de g_j son $\pm A_j/w_j$, si

$$\frac{A_n}{w_n} > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{w_j}$$

entonces se satisface i). De este modo concluye la inducción.

Lemma 2.2 La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ posee un máximo local estricto en cada punto racional.

Demostración. Sea $x \in I_n \setminus \{q_n\}$; probaremos que $f(x) < f(q_n)$. Si para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > n$ se tiene que $x \notin I_j$ entonces por i) tenemos que

$$f(x) = f_n(x) < f_n(q_n) \leq f(q_n).$$

Caso contrario, sea $h \in \{n+1, n+2, \dots\}$ el menor índice mayor que n tal que $x \in I_h$. Si existe a lo más una cantidad finita de índices $k > h$ tales que $x \in I_k$, y denotando por $k_{\max}$ al mayor de ellos, por i) y ii) tenemos que

$$f(x) = f_{k_{\max}}(x) < f_{k_{\max}}(q_{k_{\max}}) \leq f_h(q_h) < f_n(q_n) \leq f(q_n).$$

Si, por el contrario, x pertenece a una infinidad de intervalos y existe una sucesión de índices $h < k_1 < k_2 < \dots$ tales que $x \in I_{k_i}$, entonces

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x).$$

Por construcción sabemos que

$$f_{k_i}(x) < f_{k_i}(q_{k_i}) \leq f_h(q_h) < f_n(q_n),$$

y tomando el límite se obtiene

$$f(x) \leq f_h(q_h) < f_n(q_n) \leq f(q_n).$$

De donde se obtiene el resultado.

28. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existen $a, b \in [0, 2]$ tales que $a - b = 1$ y $f(a) = f(b)$.

Solución. Consideremos la función $g(x) := f(x+1) - f(x)$. Como $g(0) = f(1) - f(0)$ y $g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1)$, tenemos dos casos. Si $f(0) = f(1)$, entonces $a = 1$ y $b = 0$ cumplen lo pedido. En caso contrario, sin pérdida de generalidad consideramos que $f(1) > f(0)$, en tal caso $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$. Luego por el Teorema del Valor Intermedio existe $a \in (0, 1)$ tal que $g(a) = 0$, es decir $f(a+1) = f(a)$. Por lo tanto, obtenemos el resultado con $b = a+1$.

29. Pruebe que la ecuación $(1-x)\cos x = \sin x$ posee al menos una solución en $(0, 1)$.

Solución. Consideremos la función continua $g(x) = (1-x)\cos x - \sin x$. Notamos que $g(\pi/4) = -\pi\sqrt{2}/8 < 0$ y $g(0) = 1 > 0$. Por el Teorema del Valor Intermedio existe $x_0 \in (0, \pi/4) \subset (0, 1)$ tal que $g(x_0) = 0$, es decir, $(1-x_0)\cos x_0 = \sin x_0$.

30. Demuestre que la función $f: [1/2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$$

es continua.

Solución. Para todo $x \in [n, n+1)$ tenemos que $[x] = n$. Como la función identidad $g(x) = x$ es continua, tenemos que por álgebra de funciones continuas y que la composición de funciones continuas es continua que la función $f(x) = n + (x - n)^n$ es continua en cualquier intervalo $(n, n+1)$. Ahora probaremos que f es continua en cada punto $n \in \mathbb{Z}$. Como

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (n-1) + (x - (n-1))^{n-1} = n = \lim_{x \rightarrow n^+} n + (x - n)^n = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x),$$

entonces f es continua para todo $n \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto en su dominio $[1/2, \infty)$.

31. Para todo $x \neq -1$ sea

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n - 1}{x^n + 1} \right)^2.$$

Determine los valores donde f es continua.

Solución. Puesto que $\frac{x^n - 1}{x^n + 1} = 1 - \frac{2}{x^n + 1}$, analizamos la función f en tres casos, cuando $x = 1$, $|x| < 1$, y $|x| > 1$. Si $x = 1$ entonces $f(x) = 0$. Si $|x| < 1$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, luego $f(x) = -1$. Si $|x| > 1$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$, luego $f(x) = 1$. Es decir

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \\ 1 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Luego f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

32. Pruebe que la siguiente función $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es acotada, sin embargo no posee máximos (en particular no puede ser continua)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{n+1} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } x = \frac{m}{n}, \quad n > 0, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Solución. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|\frac{(-1)^n n}{n+1}| < 1$, luego f es acotada. Si x es racional y n es impar, o x irracional, los valores de f son menores o iguales a cero y por lo tanto no pueden ser máximos dado que f es positiva para x racional con n par. Como para todo número par $n = 2p$ tenemos que $\frac{2p}{2p+1} = 1 - \frac{1}{2p+1} < 1$, y $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2p}{2p+1} = 1$, concluimos que f no alcanza su máximo. Y por lo tanto f no puede ser continua, de otra forma, por el Teorema de Weierstrass, esta alcanzaría su máximo en un punto del dominio.

33. Construya una biyección $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en todos sus puntos.

Solución. Se puede verificar que la siguiente función satisface lo pedido,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

34. Determine si existe una función continua que transforme todo número racional en un irracional y viceversa.

Solución. Claramente una función con tal propiedad no puede ser constante. Suponiendo que tal función, denotada f , existe, entonces

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset f(\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q},$$

es numerable. Sin embargo por el Teorema del Valor Intermedio si f no es constante, entonces al menos tiene un intervalo en su imagen, y todo intervalo posee una cantidad no numerable de elementos. Por lo tanto no existe tal función.

35. Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva entonces f es monótona.

Solución. Supongamos por contradicción que f no es monótona. En particular, suponemos sin pérdida de generalidad que existen $a_1, b_1, c \in (a, b)$ tales que $a_1 < c < b_1$ y $f(b_1) < f(a_1) < f(c)$. Se procede de manera análoga en los otros casos. Sea $d \in (f(a_1), f(c))$. Entonces $f(a_1) < d < f(c)$ y $f(b_1) < d < f(c)$. Como f es continua, por el Teorema del Valor Intermedio, existen $\xi \in (a_1, c)$ y $\eta \in (c, b_1)$ tales que $f(\xi) = d = f(\eta)$, pero $\xi \neq \eta$, pues están en intervalos disjuntos. Esto contradice la inyectividad y prueba el resultado.

36. Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva tal que $f([a, b]) = X$ entonces la función inversa $f^{-1} : X \rightarrow [a, b]$ es continua.

Solución. Primero notamos que como f es inyectiva, entonces la función inversa está bien definida en el conjunto X . Además sabemos que la función es monótona por el problema anterior. Sin pérdida de generalidad suponemos que es estrictamente creciente. Así, la imagen de f es igual a $X = [f(a), f(b)]$. Sea $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$. Consideramos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$. Como f es creciente $f(a) < f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon) < f(b)$. Sea también $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 - \delta < y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon)$. Ahora probaremos la continuidad de f^{-1} por definición. Sean $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ y $x := f^{-1}(y)$. Notemos que la función f^{-1} es estrictamente creciente. Como $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$ tenemos que $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. Es decir, $x_0 - \varepsilon < x = f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, luego f^{-1} es continua.

37. Considere el siguiente orden en los números naturales:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \\ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 9 \succ \dots \\ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 9 \succ \dots \\ \dots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ 2^n \cdot 9 \succ \dots \\ \dots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \dots \succ 2 \succ 1. \end{array} \right.$$

Demuestre el siguiente resultado debido a Sarkovskii [14]. Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es una función continua tal que existe un punto periódico $x \in (a, b)$ de período n_0 , es decir,

$$f^{n_0}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n_0\text{-veces}}(x) = x$$

y esta propiedad no se tiene para $m < n_0$. Entonces existe un punto periódico para f de período k para todo $n_0 \succ k$.

Solución. La solución que presentamos sigue la prueba en el libro de Devaney [6].

Primero, para dos intervalos cerrados I_1, I_2 , vamos a introducir la notación $I_1 \rightarrow I_2$ si $f(I_1)$ cubre I_2 . Si encontramos una sucesión de intervalos $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$, entonces tenemos un punto fijo de f^n en I_1 .

Primero asumimos que f tiene un punto periódico x de período $n > 1$ impar, y supongamos que f no tiene puntos periódicos de período impar menor que n . Sean $x_1, \dots, x_n$ los puntos en la órbita de x , enumerados de izquierda a derecha, y notemos que f permuta los x_i . Claramente $f(x_n) < x_n$. Escogemos ahora el mayor i para el cual $f(x_i) > x_i$. Sea $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$. Como $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$, sigue que $f(x_{i+1}) \leq x_i$ y entonces tenemos que $I_1 \subset f(I_1)$. Por lo tanto $I_1 \rightarrow I_1$.

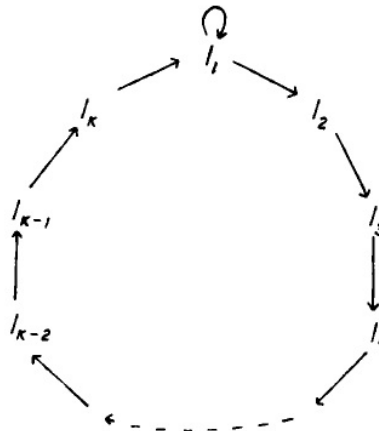
Como x no tiene período 2, no puede ser que $f(x_{i+1}) = x_i$ y $f(x_i) = x_{i+1}$, entonces $f(I_1)$ contiene al menos un intervalo de la forma $[x_j, x_{j+1}]$. A priori, pueden ser varios de estos intervalos, pero veremos luego que de hecho es solo uno. Sea $\mathcal{O}_2$ la unión de intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ que son cubiertos por $f(I_1)$. Entonces tenemos que $I_1 \subset \mathcal{O}_2$, pero $\mathcal{O}_2 \neq I_1$, y si I_2 es cualquier intervalo en $\mathcal{O}_2$ de la forma $[x_j, x_{j+1}]$, entonces $I_1 \rightarrow I_2$.

Ahora inductivamente, sea $\mathcal{O}_{l+1}$ la unión de intervalos que son cubiertos por la imagen de algún intervalo en $\mathcal{O}_l$. Notemos que, si I_{l+1} es cualquier intervalo en $\mathcal{O}_{l+1}$, existe una colección de intervalos $I_2, \dots, I_l$, con $I_j \subset \mathcal{O}_j$ que satisfacen $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_l \rightarrow I_{l+1}$.

Ahora los $\mathcal{O}_l$ forman una unión creciente de intervalos. Como existe una cantidad finita de puntos x_j , sigue que existe un l para el cual $\mathcal{O}_{l+1} = \mathcal{O}_l$. Para este l se tiene que $\mathcal{O}_l$ contiene todos los intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$, de otra forma x tendría período menor a n .

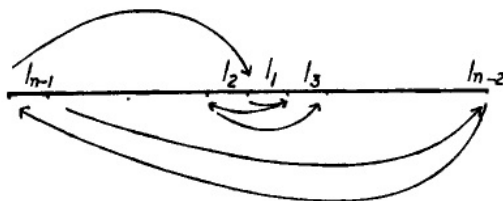
Afirmamos que hay al menos un intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ diferente de I_1 en algún $\mathcal{O}_k$ cuya imagen cubre I_1 . Esto sigue de que como n es impar, existen más x_i 's en un lado de I_1 que en el otro. Así, algunos x_i deben cambiar de lado bajo la acción de f y otros no. Consecuentemente, hay al menos un intervalo cuya imagen cubre I_1 .

Ahora consideremos cadenas de intervalos $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$, donde cada I_l es de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ para algún j donde $I_2 \neq I_1$. No asumimos que $I_l \subset \mathcal{O}_l$. Por la observación anterior, existe al menos una de estas cadenas. Escogemos el menor k para el cual esto ocurre, es decir, $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ es el camino más corto de I_1 a I_1 (excepto por $I_1 \rightarrow I_1$).



Ahora, si $k < n - 1$, entonces una de las cadenas $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ o $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ entrega un punto fijo de f^m con $m < k$ impar. Este punto debe tener período mínimo $< k$ pues $I_1 \cap I_2$ consiste de un solo punto, y ese punto tiene período $> m$. Por lo tanto $k = n - 1$.

Como k es el menor entero que funciona, no puede ser que $I_l \rightarrow I_j$ para $j > l + 1$. Sigue que la órbita de x debe estar ordenado en $\mathbb{R}$ de dos posibles maneras, una de ellas se muestra en la figura ??.



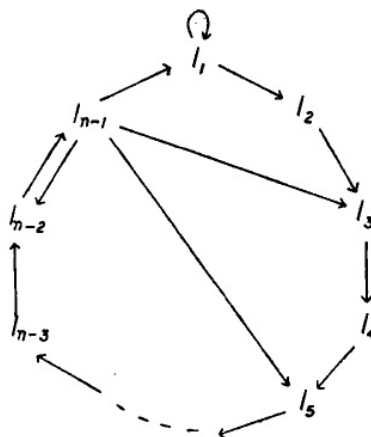
Entonces podemos extender el diagrama de la figura ?? al que se muestra en la figura ???. Ahora el Teorema de Sarkovskii para el caso especial n impar es inmediato. Períodos mayores que n están dados por ciclos de la forma $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$. Los períodos pares menores están dados por ciclos de la forma

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1},$$

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-4} \rightarrow I_{n-3} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1},$$

etcétera. Para el caso n par, primero notemos que f debe tener un punto de período 2. Esto sigue del argumento anterior que garantiza que algunos x_i cambian de lado bajo la acción de f y otros no (use el hecho que $I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$ y $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2}$). Si este no es el caso, entonces todos los x_i cambian de lado, y entonces $[x_{i+1}, x_n] \subset f([x_1, x_i])$ y $[x_1, x_i] \subset f([x_{i+1}, x_n])$.

Pero entonces, nuestra observación anterior produce un punto de período 2 en $[x_1, x_i]$.



Ahora el teorema será probado para $n = 2^m$ como sigue. Sea $k = 2^l$ con $l < m$. Considere $g = f^{k/2}$. Por hipótesis, g tiene un punto periódico de período 2^{m-l+1} . Por lo tanto, g tiene un punto que tiene período 2. Este punto tiene período 2^l para f . El caso final es $n = p \cdot 2^m$ con p impar, que se puede reducir a los dos anteriores.

38. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, demuestre que las siguientes funciones también son continuas

$$M(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad m(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Solución. Notamos que

$$M(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \quad m(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Luego, tanto $M(x)$ como $m(x)$ son la suma de (composiciones) de funciones continuas, y por lo tanto también continuas.

39. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$. Demuestre que si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

En particular f es continua.

Solución. Sean $y \in A$, y $x, z \in \mathbb{R}$. Por la desigualdad triangular tenemos que $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Ahora, tomando ínfimo en $y \in A$ obtenemos $f(x) \leq |x - z| + f(z)$. Por lo tanto, $f(x) - f(z) \leq |x - z|$. Intercambiando los roles de x y z , tenemos que $-|x - z| \leq f(x) - f(z)$, de donde se concluye el resultado.

40. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que si $r \in \mathbb{Q}$ entonces $f(r) = g(r)$. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = g(x)$.

Solución. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un número irracional y $(x_n)_n$ una sucesión de números racionales que converge a x (esta sucesión existe ya que los racionales son densos en los reales). Como f y g son funciones continuas tenemos que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ y $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f(x_n) = g(x_n)$, luego $f(x) = g(x)$. Por lo tanto $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

41. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina el conjunto C_n formado por los puntos $a \in \mathbb{R}$ tales que existe un intervalo abierto I que contiene al punto $x = a$, de modo que si $x, y \in I$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n}.$$

Demuestre que f es continua en $x = a$ si y solo si $a \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Supongamos que f es continua en a . Sea $\varepsilon = 1/2n$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| \leq 1/2n$. Por lo tanto, para todo $x, y \in (a - \delta, a + \delta)$ se tiene que $|f(x) - f(y)| < 1/n$. Para probar la otra implicancia basta considerar $y = a$ y observar que $1/n$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

42. Determine si existe una función continua en los números racionales y discontinua en los irracionales (utlice el problema anterior).

Solución. Por el ejercicio anterior sabemos que si existiera una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con tales propiedades, entonces el conjunto de puntos de discontinuidad se escribiría como $\mathbb{Q} = \bigcap_n C_n$, es decir la intersección de numerables conjuntos abiertos, pues el conjunto C_n es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$. De otra forma

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_n C_n^c,$$

es la unión numerable de conjuntos cerrados. En lo que sigue probaremos que esto no puede ocurrir ocupando un conocido teorema de la topología en $\mathbb{R}$.

Teorema de Baire: Si $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados con interior vacío, entonces $\bigcup_n F_i$ también tiene interior vacío.

Ahora, si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_n C_n^c$, entonces el conjunto C_n^c tiene interior vacío, pues de otra forma C_n contendría elementos de $\mathbb{Q}$. Por otra parte, si enumeramos los racionales por $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $\mathbb{Q} = \bigcup_n \{q_n\}$ es la unión de numerables conjuntos con interior vacío. Luego,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left(\bigcup_n \{q_n\}\right) \cup \left(\bigcup_n C_n^c\right),$$

por lo que por el Teorema de Baire $\mathbb{R}$ es un conjunto con interior vacío lo cual es absurdo. Esto completa la prueba de que no existe tal función.

43. Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio de grado par dado por $p(x) = a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$. Demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$, este ejercicio es un caso particular del siguiente problema.

44. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, existen $M, N > 0$ tales que si $x > M$ entonces $f(x) > f(0)$, y si $x < -N$ entonces $f(x) > f(0)$. Por lo tanto, necesariamente el mínimo de f se alcanza en el intervalo $[-N, M]$. Además, como f es continua en el intervalo $[-N, M]$, podemos usar el Teorema de Weierstrass para probar que existe el mínimo en este intervalo.

45. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Demuestre que f es continua.

Solución. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como g es continua existe $\delta > 0$ tal que si $|a - y| < \delta$, entonces $|g(a) - g(y)| < \varepsilon/3$. Ahora, si $|x - a| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto la función f es continua.

46. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + ax \sin x$. Demuestre que si $|a| < 1$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Solución. Probaremos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, el otro límite se obtiene similarmente. Primero notamos que $f(x) = x(1 + a \sin x)$. Además, $0 < 1 - |a| \leq 1 + a \sin x \leq 1 + |a|$. Por lo tanto el resultado se sigue dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - |a|) = +\infty$.

47. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in [0, 1]$ se tiene que $f(x) \in \mathbb{Q}$ y $f(1/2) = 1/2$. Demuestre que para todo $x \in (0, 1)$ se tiene que $f(x) = 1/2$.

Solución. Supongamos que f no es constante, es decir, que existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = a \neq 1/2$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $x_0 < 1/2$ y que $a < 1/2$. Sea $d \in (a, 1/2) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ arbitrario. Luego, como f es continua por el Teorema del Valor Intermedio existe $x' \in (x_0, 1/2)$ tal que $f(x') = d$. Sin embargo esto contradice que $f(x') \in \mathbb{Q}$. Es decir la función es constante igual a $1/2$.

48. Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona y satisface la propiedad del valor intermedio entonces es continua.

Solución. Supongamos sin pérdida de generalidad que f es creciente. Probaremos el resultado por contradicción. Es decir, supongamos que f no es continua en un punto, digamos $c \in (a, b)$. Como f es monótona y creciente, tenemos que $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_2 < L_1 = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, por el Ejercicio 8. Luego, como la función es monótona existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que si $0 < c - x < \delta$ entonces $f(x) < L_2$, y si $0 < x - c < \delta$ entonces $f(x) > L_1$. Por lo tanto, $(L_1 + L_2)/2 \in (f(c - \delta), f(c + \delta))$ y para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$ se tiene que $f(x) \neq (L_1 + L_2)/2$. Es decir, no se satisface la propiedad del valor intermedio. Esta contradicción prueba el resultado.

49. Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - 2 & \text{si } x \leq 4, \\ (x-5)^2 & \text{si } x > 4, \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = |2x+1|.$$

Determine si los siguientes límites existen, y en caso que existan, calcule su valor:

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (f \circ g)(x).$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{g(x)}{x + \frac{1}{2}}.$

Solución. Para el límite en i), observemos que las funciones f y g son continuas en todo $\mathbb{R}$. Así, como la composición de funciones continuas es continua, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(3/2) = 1.$$

Para el límite en ii), usamos los límites laterales. Primero,

$$\lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{g(x)}{x + 1/2} = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{|2x+1|}{x + 1/2} = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{2x+1}{x + 1/2} = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{2(2x+1)}{2x+1} = 2$$

Por otra parte,

$$\lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{g(x)}{x + 1/2} = \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{|2x+1|}{x + 1/2} = \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{-(2x+1)}{x + 1/2} = -2.$$

Por lo tanto el límite no existe.

50. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ una función continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(g(x) - 1)}{\sqrt{g(x)} - 1}.$$

Solución. Notamos que

$$\frac{\sin(g(x) - 1)}{\sqrt{g(x)} - 1} = \frac{\sin(g(x) - 1)}{g(x) - 1} (\sqrt{g(x)} + 1).$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(g(x) - 1)}{\sqrt{g(x)} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(g(x) - 1)}{g(x) - 1} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{g(x)} + 1) = 1 \cdot 2 = 2.$$

51. Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

donde n es par. Demuestre que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $p(y) \leq p(x)$.

Solución. Sea M suficientemente grande tal que si $|x| \geq M$ entonces $\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}$. Luego, como n es par, para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $x^n \geq 0$, y así

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) = p(x).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty. \quad (2.3)$$

Además, sea N suficientemente grande tal que si $|x| > N$ entonces $p(x) > 2p(0)$. Luego, el mínimo de la función p , si existe, necesariamente esta en el intervalo $[-N, N]$. Finalmente usamos el Teorema de Weierstrass en el intervalo $[-N, N]$ para probar que existe un mínimo global y para la función p restringida a $[-N, N]$. Y or el argumento anterior y es también un mínimo global de p en $\mathbb{R}$.

52. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$. Diremos que la función f es α -continua en el punto $x \in \mathbb{R}$ si existe $\delta > 0$ tal que para todo $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ se tiene que $|f(y) - f(z)| < \alpha$. Sea

$$D_\alpha^f = D_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \text{la función } f \text{ no es } \alpha\text{-continua en } x\}.$$

- a) Demuestre que si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces $D_{\alpha_1}^c \subset D_{\alpha_2}^c$.
- b) Demuestre que si f es continua en $x \in \mathbb{R}$ entonces es α -continua en x , para todo $\alpha > 0$.
- c) Demuestre que si f no es continua en $x \in \mathbb{R}$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que f no es α -continua en x . Deduzca que el conjunto de discontinuidades de una función f , denotado por D_f , es tal que

$$D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}.$$

- d) Demuestre que dado $\alpha > 0$ el conjunto D_α es cerrado, es decir, para cualquier sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in D_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que si $(x_n)_n$ converge al punto $x \in \mathbb{R}$ entonces $x \in D_\alpha$.
- e) En virtud de lo anterior se tiene que el conjunto D_f es la unión numerable de conjuntos cerrados.
- f) Exhiba un ejemplo de un conjunto que no es la unión numerable de conjuntos cerrados.

Solución. Para la parte a), observemos que si f es α_1 -continua en x , entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ se tiene que $|f(y) - f(z)| < \alpha_1 < \alpha_2$. Luego f es α_2 -continua en x , es decir $D_{\alpha_1}^c \subset D_{\alpha_2}^c$.

Para la parte b), supongamos que f es continua en $x \in \mathbb{R}$ y fijemos $\alpha > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(a)| < \alpha/2$. Así, $|f(y) - f(z)| < \alpha$ para todo $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$, es decir f es α -continua en x . Como $\alpha > 0$ es arbitrario, se concluye el resultado.

Ya probamos en el Ejercicio 41 que $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$ pero escrito de una manera algo distinta. Basta observar que $C_n = D_{1/n}^c$ y de esta igualdad es directo lo pedido en c). La parte d) también sigue de lo hecho en el Ejercicio 42 cuando se probó que C_n es abierto.

La parte e) es consecuencia de las partes c) y d). Por último, la parte f) viene de la solución del Ejercicio 42, cuando probamos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tiene tal propiedad.

Referencias

1. Abbott, Stephen. *Understanding analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001, xii+257 pp.
2. Assmus, E. F., Jr. *A Continuous Function*. *The American Mathematical Monthly* **69** (1962), no. 7, 647.
3. Bressoud, David M. *A radical approach to real analysis*. Second edition. Classroom Resource Materials Series. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007, xvi+323 pp.
4. Buckley, Benjamin Lee. *The Continuity Debate: Dedekind, Cantor, du Bois-Reymond, and Peirce on Continuity and Infinitesimals*. Docent Press, 2012.
5. Courant, Richard and John, Fritz. *Introduction to calculus and analysis. Vol. I*. Reprint of the 1989 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999, xxiv+661 pp.
6. Devaney, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Stud. Nonlinearity Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989, xviii+336 pp.
7. Drobot, Vladimir and Morayne, Michael. *Continuous Functions with a Dense Set of Proper Local Maxima*. *The American Mathematical Monthly* **92** (1985), no. 3, 209–211.
8. Fort, M. K., Jr. *The Maximum Value of a Continuous Function*. *The American Mathematical Monthly* **58** (1951), no. 1, 32–33.
9. Gelbaum, Bernard R. and Olmsted, John M. H. *Counterexamples in analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003, xxiv+195 pp.
10. Hardy, G. H. *A course of pure mathematics*. 10th ed. Cambridge University Press, New York, 1958, xii+509 pp.
11. Posey, E. E. and Vaughan, J. E. *Functions with a Proper Local Maximum in Each Interval*. *The American Mathematical Monthly* **90** (1983), no. 4, 281–282.
12. Pease, D. K. *Limits used in the Derivative of $\sin x$* . *The American Mathematical Monthly* **60** (1953), no. 7, 477.
13. Shakarchi, Rami. *Problems and solutions for Undergraduate analysis*. Springer-Verlag, New York, 1998, xii+368 pp.
14. Sarkovskii, O. M. *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*. *Ukrain. Mat. Z.* **16** (1964), 61–71.
15. Schoenflies, A. *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900.
16. UCV. *Cálculo Diferencial*. Tercera Edición. Universidad Católica de Valparaíso, 1982.
17. Zegarra, L. *Ejercicios de Cálculo I*. 1978.

Capítulo 3

La Derivada

Algunos de los siguientes ejercicios aparecen en los textos de Bressoud [3], Courant y John [7], Gelbaum y Olmsted [10], Hardy [11], Lima [14], Rudin [19], Shakarchi [21] y en los textos de la Universidad Católica de Valparaíso [23] y de Zagarra [26].

1. Determine, en los puntos en que existen, las derivadas de las siguientes funciones

$$f(x) = |x|x, \quad f(x) = \sqrt{|x|}, \quad f(x) = \log_x 3, \quad f(x) = \log_x(\cos x).$$

Solución. Notemos que $f(x) = x|x|$ está definida por $f(x) = -x^2$ si $x < 0$ y $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$. La función f es diferenciable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y su derivada en este conjunto es $f'(x) = 2|x|$. La derivada en $x = 0$ es

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Por lo tanto, la derivada de f en $x = 0$ existe y es igual a cero.

La segunda función está definida por $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$, y $f(x) = \sqrt{-x}$ si $x < 0$. En este caso tenemos que $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ si $x > 0$ y $f'(x) = -1/2\sqrt{-x}$ si $x < 0$. Cuando $x = 0$ tenemos,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty.$$

Por lo tanto, como no existe el límite, la función no es diferenciable en $x = 0$.

En el caso de tercera función, notamos que $f(x) = \log_x 3 = \log 3 / \log x$. Por lo tanto para $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{\log 3}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\log 3}{x \log^2 x}.$$

Para la cuarta función, notamos que $f(x) = \log_x \cos x = \frac{\log(\cos x)}{\log x}$. De donde

$$f'(x) = \frac{-\frac{\sin x}{\cos x} \log x - \frac{\log(\cos x)}{x}}{\log^2 x} = -\frac{\sin x}{\cos(x) \log x} - \frac{\log(\cos x)}{x \log^2 x}$$

cuyo dominio es el conjunto de números reales x con $\cos x > 0$.

2. Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\cos(\pi/x)| & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

no es diferenciable en los puntos $x_n = 2/(2n+1)$ donde $n \in \mathbb{Z}$, pero es diferenciable en $x = 0$ que es límite de la sucesión $(x_n)_n$.

Solución. Por definición

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 |\cos(\pi/h)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h |\cos(\pi/h)| = 0.$$

Por lo tanto, la función f es diferenciable en $x = 0$. Consideremos ahora la diferenciable en x_n donde notamos que $\cos(\pi/x_n) = 0$. Ahora, para n impar

$$\lim_{x \rightarrow x_n^+} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = \lim_{x \rightarrow x_n^+} \frac{x^2 \cos(\pi/x) - 0}{x - x_n} = \left(2x \cos(\pi/x) - x^2 \left(\frac{-\pi}{x^2} \right) \sin(\pi/x) \right) \Big|_{x=x_n}.$$

Así $f'_+(x_n) = -1$. Análogamente obtenemos que $f'_-(x_n) = 1$. Por tanto f no es diferenciable en $x = x_n$.

3. Suponga que las funciones f y g son diferenciables en el punto $x = a$. Determine

a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a},$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

Solución.

a) Primero reescribimos el límite como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - xf(x) + xf(x) - af(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f(x) - x(f(x) - f(a))}{x - a}.$$

Luego, concluimos usando la continuidad de la función f en $x = a$, y la regla del producto para límites,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f(x) - x(f(x) - f(a))}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

b) Similarmente, reescribimos el límite pedido y usamos las reglas de límites para obtener

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g(a)f'(a) - f(a)g'(a).$$

4. Sea f una función diferenciable en $x = 0$ con $f'(0) \neq 0$. Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}.$$

Solución. Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - f(0)e^0}{x - 0}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\cos x - f(0)\cos 0}{x - 0}} = \frac{(f(x)e^x)' \Big|_{x=0}}{(f(x)\cos x)' \Big|_{x=0}} = \frac{f'(0) + f(0)}{f'(0)}.$$

5. Sea f una función diferenciable en $x = a$ con $f(a) > 0$. Determine

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{1/(\log x - \log a)}.$$

Solución. Notemos que como la exponencial es continua y el logaritmo es su inversa, este límite es igual a

$$\exp \left\{ \lim_{x \rightarrow a} \log \left[\left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\log x - \log a}} \right] \right\}$$

Pero,

$$\log \left[\left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\log x - \log a}} \right] = \frac{1}{\frac{\log x - \log a}{x - a}} \cdot \frac{\log f(x) - \log f(a)}{x - a}.$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\log x - \log a}{x - a}} \cdot \frac{\log f(x) - \log f(a)}{x - a} = \frac{1}{(\log x)'_{x=a}} (\log f(x))'_{x=a} = \frac{af'(a)}{f(a)}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\log x - \log a}} = \exp \left(\frac{af'(a)}{f(a)} \right).$$

6. Sea f una función diferenciable en $x = 0$ con $f(0) = 0$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Determine el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right).$$

Solución. Como $f(0) = 0$, podemos reescribir el límite pedido de la siguiente forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{1}{2} \frac{f(x/2) - f(0)}{x/2} + \cdots + \frac{1}{k} \frac{f(x/k) - f(0)}{x/k} \right)$$

Luego, usando que f es diferenciable en $x = 0$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \right) f'(0).$$

7. *Funciones hiperbólicas.* La función *coseno hiperbólico* se define por $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, y la función *seno hiperbólico* se define por $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Demuestre que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ y calcule las derivadas de ambas funciones.

Solución. Por definición tenemos que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$. Además, usando las propiedades de derivadas,

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x), \quad \sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

8. Calcule la derivada de las siguientes funciones

a)

$$f(x) = \arccos(\ln x), \quad g(x) = \sqrt{2x + \sqrt{2x + \sqrt{2x}}}, \quad h(x) = \frac{\tan(2x)}{1 - \cot(3x)}.$$

b)

$$f(x) = \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^3, \quad g(x) = \frac{\sec(x^2) \operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec}(x^2+1)}, \quad h(x) = \operatorname{sen}(x^3)^{\arctan x^2}.$$

c)

$$f(x) = x^{x^x}, \quad g(x) = e^x \arcsen x, \quad h(x) = \ln \left(\cos \arcsen 3^{2-x} \right).$$

d)

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}, \quad g(x) = \arctan \sqrt{\sqrt{x} + \arccos x}.$$

e)

$$f(x) = \frac{1}{(\sec 2x - 1)^{3/2}}, \quad g(x) = (\ln x)(\operatorname{sen}(e^x)), \quad h(x) = x^5 \cos(\ln x^2).$$

Solución.

a)

$$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-(\ln(x))^2}}, \quad g'(x) = \frac{1}{8} \frac{8\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{2}+2\sqrt{x})}\sqrt{x}+4\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{2}+2\sqrt{x})}}\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{2}+2\sqrt{x})}\sqrt{x}},$$

$$h'(x) = \frac{2\sec^2(2x)}{1-\cot(3x)} - \frac{3\tan(2x)\csc^2(3x)}{(1-\cot(3x))^2}.$$

b)

$$f'(x) = \frac{3 \left(\cos \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2 - 1 \right) \cos \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}},$$

$$g'(x) = 2\sec(x^2)\tan(x^2)x\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x^2+1) + \sec(x^2)\cos(x)\operatorname{sen}(x^2+1) + 2\sec(x^2)\operatorname{sen}(x)\cos(x^2+1)x,$$

$$h'(x) = \operatorname{sen}(x^3)^{\arctan(x^2)} \left(\frac{2x \ln(\operatorname{sen}(x^3))}{x^4+1} + \frac{3 \arctan(x^2) \cos(x^3)x^2}{\operatorname{sen}(x^3)} \right).$$

c)

$$f'(x) = x^{x^x} (x^x (\ln x + 1) \ln x + x^{x-1}), \quad g'(x) = e^x \arcsen x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h'(x) = \frac{(3^{2-x})^2 2^{-x} \ln(2) \ln(3)}{1 - (3^{2-x})^2}.$$

d)

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x)^{\cos x} \left(-\operatorname{sen}(x) \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{\cos(x)^2}{\operatorname{sen} x} \right) + \cos(x)^{\operatorname{sen} x} \left(\cos(x) \ln(\cos x) - \frac{\operatorname{sen}(x)^2}{\cos x} \right),$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\sqrt{x} + \arccos x} (1 + \sqrt{x} + \arccos x)}$$

e)

$$f'(x) = -\frac{3\sec(2x)\tan(2x)}{(\sec(2x)-1)^{5/2}},$$

$$g'(x) = \frac{\operatorname{sen}(e^x)}{x} + \ln(x) \cos(e^x) e^x, \quad h'(x) = 5x^4 \cos(\ln(x^2)) - 2x^4 \operatorname{sen}(\ln(x^2)).$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica, es decir, tal que existe $A \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x+A) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f' también es periódica.

Solución. Derivando la igualdad $f(x) = f(x+A)$, obtenemos $f'(x) = f'(x+A) \frac{d}{dx}(x+A) = f'(x+A)$. Por lo tanto, f' también es periódica.

10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que f es diferenciable excepto quizás en $c \in (a, b)$. Demuestre que si $f'(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow c$, entonces $f'(c) = L$.

Solución. Sea $x \in (a, c)$. Por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi(x) \in (x, c)$ tal que $f'(\xi(x)) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Además, como $x < \xi(x) < c$, tenemos que $\xi(x) \rightarrow c$ cuando $x \rightarrow c^-$. Entonces

$$L = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(\xi(x)) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} =: f'_-(c).$$

Donde $f'_-(c)$ es la derivada por la izquierda de f en c . Análogamente $f'_+(c) = L$, luego $f'(c) = L$.

11. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable cuya derivada es continua y decreciente tal que $f'(b) > 0$. Sea $b_0 = b$. Demuestre que los números

$$b_n = f^{-1}(f(b_{n-1}) - f'(b_{n-1})(b_{n-1} - a))$$

están bien definidos y son tales que $a < b_n < b_{n-1}$. Demuestre que la sucesión $\{f(b_n)\}_n$ converge al punto $x = a$ (ver Evans [9]).

Solución. Primero notamos que como f' es decreciente y $f'(b)$ es positivo, entonces $f'(x) \geq f'(b) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. En particular, f es estrictamente creciente.

Ahora procedemos por inducción. Por el Teorema del Valor Medio aplicado a f en $[a, b]$, existe $a < X < b$ tal que $f(a) = f(b) - f'(X)(b-a)$. Entonces, como f' es decreciente y $f'(b) > 0$, se tiene que

$$f(a) < f(b) - f'(b)(b-a) < f(b).$$

Como f es continua, podemos usar el Teorema del Valor Intermedio para probar que existe con $a < b_1 < b$ tal que $f(b_1) = f(b) - f'(b)(b-a)$. Además f es creciente y continua en $[a, b]$, así la función inversa f^{-1} existe. Por tanto $b_1 = f^{-1}(f(b) - f'(b)(b-a))$.

Ahora asumimos por inducción que b_n existe con $a < b_n < b_{n-1}$. Como antes, usamos el Teorema del Valor Medio a f en $[a, b_n]$, para probar que

$$f(a) < f(b_n) - f'(b_n)(b_n - a) < f(b_n).$$

Luego, por el Teorema del Valor Intermedio y usando la función inversa f^{-1} obtenemos que $b_{n+1} = f^{-1}(f(b_n) - f'(b_n)(b_n - a))$ existe con $a < b_{n+1} < b_n$ y se completa la inducción.

La sucesión $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente por a , por lo tanto el límite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existe y pertenece al intervalo $[a, b]$. Como $f(b_n) = f(b_{n-1}) - f'(b_{n-1})(b_{n-1} - a)$, sigue de la continuidad de f y f' que $L = a$. Por lo tanto $\{f(b_n)\}_n$ converge a $f(a)$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x|$, demuestre que es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y calcule su derivada.

Solución. Si $x > 0$ entonces $f(x) = x^2$. En este caso la derivada viene dada por $f'(x) = 2x$. Análogamente, si $x < 0$ entonces $f'(x) = -2x$. Consideramos ahora el caso $x = 0$. Por definición,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

13. Sean $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Determine la derivada de u^v utilizando el Teorema del Valor Medio (sin utilizar el logaritmo). Ver [25].

Solución. En lo que sigue probaremos el límite anterior por definición. Como

$$u(x+h)^{v(x+h)} - u(x)^{v(x)} = (u(x+h)^{v(x+h)} - u(x)^{v(x+h)}) + (u(x)^{v(x+h)} - u(x)^{v(x)}),$$

aplicando el Teorema del Valor Medio para el primer término fijando $v(x+h)$ en el exponente,

$$u(x+h)^{v(x+h)} - u(x)^{v(x+h)} = (u(x+h) - u(x)) \cdot v(x+h) \cdot r^{v(x+h)-1},$$

donde $u(x+h) < r < u(x)$ o $u(x) < r < u(x+h)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio al segundo término en la descomposición inicial,

$$u(x)^{v(x+h)} - u(x)^{v(x)} = (v(x+h) - v(x))u(x)^s \log(u(x)),$$

donde $v(x+h) < s < v(x)$ o $v(x) < s < v(x+h)$. Por tanto, obtenemos que

$$\frac{u(x+h)^{v(x+h)} - u(x)^{v(x)}}{h} = v(x+h) \cdot r^{v(x+h)-1} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)^s \log(u(x)) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Para finalizar basta tomar el límite cuando $h \rightarrow 0$. En el límite, notamos que $r \rightarrow u(x)$ y $s \rightarrow v(x)$. De aquí se concluye.

14. El siguiente ejercicio fue propuesto por Longley [15] en 1937. Sea $a > 0$ y $\alpha \in (0, \pi)$. Definimos

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

La función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se define por partes,

$$f(r) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3 & \text{si } 0 < r \leq b, \\ \frac{\pi}{3 \operatorname{sen}^3 \alpha} (r(\operatorname{sen} \alpha - 1) + a \operatorname{sen} \alpha)^2 (r(2 \operatorname{sen} \alpha + 1) - a \operatorname{sen} \alpha) & \text{si } b < r \leq c, \\ \frac{\pi}{3} (2r^3 - (2r^2 + a^2 \tan^2 \alpha) \sqrt{r^2 - a^2 \tan^2 \alpha}) & \text{si } c < r. \end{cases}$$

Demuestre que la función f es diferenciable en todo su dominio y que su derivada es continua, sin embargo su segunda derivada posee discontinuidades.

Solución. Denotamos las ramas de f por f_1, f_2, f_3 , respectivamente. Como las funciones en las ramas son dos veces diferenciables, basta evaluar la diferenciabilidad de la función en los puntos b y c .

Por sustitución directa tenemos que

$$f_1(b) = f_2(b) = \frac{4\pi a^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{3(1 + \operatorname{sen} \alpha)^3}, \quad f_2(c) = f_3(c) = \frac{\pi a^3 \operatorname{sen}^3 \alpha (2 + \operatorname{sen} \alpha)}{3(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha)^3}.$$

Por lo tanto f es continua en $r = b$ y en $r = c$. La primera derivada de f cuando $0 < r \leq b$ es $\frac{df}{dr} = f'_1(r) = 4\pi r^2$. La derivada de f cuando $b < r \leq c$ es

$$\frac{df}{dr} = f'_2(r) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}^3 \alpha} (r(\operatorname{sen} \alpha - 1) + a \operatorname{sen} \alpha) (r(2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha - 1) + a \operatorname{sen} \alpha).$$

La derivada de f cuando $r > c$ es,

$$\frac{df}{dr} = f'_3(r) = \pi \left(2r^2 - \frac{r(2r^2 - a^2 \tan^2 \alpha)}{\sqrt{r^2 - a^2 \tan^2 \alpha}} \right).$$

Nuevamente por sustitución directa tenemos

$$f_1'(b) = f_2'(b) = \frac{4\pi a^2 \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2}, \quad f_2'(c) = f_3'(c) = -\frac{\pi a^2 \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2}.$$

Por lo tanto df/dr también es continua en $r = b$ y en $r = c$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} f_1''(b) &= \frac{8\pi a \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}, & f_2''(b) &= -\frac{2\pi a(1 - \sin \alpha)(1 + 3 \sin \alpha)}{\sin \alpha(1 + \sin \alpha)}, \\ f_2''(c) &= -\frac{2\pi a(1 - \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha}, & f_3''(c) &= \frac{\pi a(1 - \sin \alpha)(1 + 2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha(1 + \sin \alpha)}. \end{aligned}$$

Supongamos que $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. En este caso se tiene que $\lim_{r \rightarrow b^-} \frac{d^2 f}{dr^2}$ es un número positivo, y $\lim_{r \rightarrow b^+} \frac{d^2 f}{dr^2}$ un número negativo. Por lo tanto la segunda derivada tiene una discontinuidad finita en $r = b$. Además, tenemos que $\lim_{r \rightarrow c^-} \frac{d^2 f}{dr^2}$ es un número negativo, y $\lim_{r \rightarrow c^+} \frac{d^2 f}{dr^2}$ un número positivo cuando $r > c$. Por lo tanto, la segunda derivada tiene también una discontinuidad en $r = c$. El caso cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ó $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ se pueden probar similarmente.

15. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $g = f \cdot h$. Demuestre que la n -ésima derivada de g viene dada por

$$g^{(n)} = h^{(n)} f + \binom{n}{1} h^{(n-1)} f' + \binom{n}{2} h^{(n-2)} f'' + \dots + h f^{(n)}.$$

A partir de este resultado, deducir una fórmula general para la n -ésima derivada del cociente $f = g/h$. Ver el artículo de Ivanoff [13].

Solución. Probaremos el resultado por inducción. Para $n = 1$ la propiedad se satisface ya que $(fh)' = f'h + fh'$. Ahora, supongamos que la propiedad se cumple para n . Derivando la igualdad para n obtenemos:

$$\begin{aligned} (fh)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} h^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} h^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} h^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} h^{(n+1-k)} \\ &= f^{(0)} h^{(n+1)} + f^{(n+1)} h^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} h^{(n+1-k)} \\ &= f^{(0)} h^{(n+1)} + f^{(n+1)} h^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} h^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} h^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

Luego, se tiene que para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ la fórmula para el producto se satisface. Evaluando la expresión $g^{(n)} = (fh)^{(n)}$ y despejando el término $f^{(n)} h$, obtenemos una fórmula recursiva para la n -ésima derivada del cociente $f = g/h$:

$$f^{(n)} = \frac{1}{h} \left(g^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)} h^{(n-k)} \right).$$

Alternativamente, como demuestra Ivanoff [13], este sistema triangular de $n + 1$ ecuaciones lineales para las incógnitas $f, f', \dots, f^{(n)}$ se puede resolver explícitamente utilizando la regla de Cramer, lo que permite expresar la n -ésima derivada $f^{(n)}$ de forma compacta como un determinante de orden $n + 1$.

16. En el ejercicio anterior se pide probar la regla de Leibniz para la n -ésima derivada de un producto de dos funciones. Determine una fórmula análoga para el producto de m funciones diferenciables. Vea el artículo de Mazkewitsch [16].

Solución. Procederemos por inducción sobre el número de funciones m . Afirmamos que la n -ésima derivada del producto de m funciones $f_1, f_2, \dots, f_m$ está dada por la fórmula multinomial:

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{(n)} = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_m=n} \binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} \prod_{i=1}^m f_i^{(j_i)},$$

donde, por definición, el coeficiente multinomial es

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Para $m = 2$, la fórmula se reduce a

$$(f_1 f_2)^{(n)} = \sum_{j_1+j_2=n} \frac{n!}{j_1! j_2!} f_1^{(j_1)} f_2^{(j_2)} = \sum_{j_1=0}^n \binom{n}{j_1} f_1^{(j_1)} f_2^{(n-j_1)},$$

lo cual es exactamente la regla generalizada de Leibniz para dos funciones que demostramos en el ejercicio anterior.

Paso inductivo: Supongamos que la fórmula es cierta para el producto de m funciones. Consideremos ahora el caso para $m+1$ funciones. Podemos agruparlas como el producto de dos funciones: $F \cdot f_{m+1}$, donde $F = \prod_{i=1}^m f_i$. Aplicando la regla de Leibniz para dos funciones (nuestro paso base) obtenemos:

$$\left(\prod_{i=1}^{m+1} f_i \right)^{(n)} = (F \cdot f_{m+1})^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F^{(k)} f_{m+1}^{(n-k)}.$$

Por nuestra hipótesis inductiva, sabemos que la k -ésima derivada de F es:

$$F^{(k)} = \sum_{j_1+\dots+j_m=k} \frac{k!}{j_1! \dots j_m!} \prod_{i=1}^m f_i^{(j_i)}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior, resulta:

$$\left(\prod_{i=1}^{m+1} f_i \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\sum_{j_1+\dots+j_m=k} \frac{k!}{j_1! \dots j_m!} \prod_{i=1}^m f_i^{(j_i)} \right) f_{m+1}^{(n-k)}.$$

Al reagrupar y multiplicar los coeficientes, notamos que los términos $k!$ se cancelan:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{j_1! \dots j_m!} = \frac{n!}{j_1! \dots j_m! (n-k)!}.$$

Si definimos $j_{m+1} = n - k$, observamos que la condición de la sumatoria interna $\sum_{i=1}^m j_i = k$ implica que $\sum_{i=1}^{m+1} j_i = k + (n - k) = n$. Además, iterar sobre todos los k posibles y luego sobre todas las particiones de k , es exactamente equivalente a iterar sobre todas las particiones posibles de n en $m+1$ enteros no negativos. Por lo tanto, la expresión se simplifica a:

$$\sum_{j_1+\dots+j_{m+1}=n} \frac{n!}{j_1! \dots j_{m+1}!} \prod_{i=1}^{m+1} f_i^{(j_i)},$$

lo que concluye el paso inductivo y demuestra la fórmula general.

17. Determine el número de raíces menores que uno de la ecuación

$$f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2 = 0.$$

Es decir, determine el número de elementos $x \leq 1$ tales que $f(x) = 0$.

Solución. Notemos que la derivada $f'(x) = 20x^3(x-1)$ se anula solamente cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por lo tanto la ecuación $f(x) = 0$ puede tener a lo más una raíz real en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, 1)$. En efecto si cualesquiera de esos intervalos tuviese dos raíces, por ejemplo $y_1, y_2 \in (0, 1)$ (o en $(-\infty, 0)$) con $f(y_1) = f(y_2) = 0$, por el Teorema de Rolle la derivada debiese anularse en algún punto de $(0, 1)$ (o de $(-\infty, 0)$).

Notemos que $f(0) = 2 > 0$ y que $f(1) = 1 > 0$. Tenemos además que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $f(-n) < 0$. Luego, por el Teorema del Valor Intermedio existe $x_1 \in (-\infty, 0)$ tal que $f(x_1) = 0$.

Observemos finalmente que no hay raíces en $[0, 1]$. Como $f(0) = 2$ y $f(1) = 1$, si existe $y \in (0, 1)$ tal que $f(y) = 0$ entonces necesariamente $f(y)$ debe ser el mínimo de $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y por lo tanto $f'(y) = 0$. Pero ya vimos que la derivada de f no se anula en $(0, 1)$. Por lo tanto existe una única raíz de f en $(-\infty, 1)$.

18. Construya una función diferenciable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ se tiene que $f(r) \in \mathbb{Q}$ es racional y $f'(r) \notin \mathbb{Q}$ es irracional (ver [20] y las referencias que ahí aparecen).

Solución. Sea $\tilde{g}: [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{g}(x) = x(1 - 4x^2)$. Definimos g como la extensión 1-periódica de $\tilde{g}$ a todo $\mathbb{R}$. Notamos que $\tilde{g}(\pm 1/2) = 0$ y $\tilde{g}'(\pm 1/2) = -2$, por lo que la extensión g resulta ser diferenciable en todo $\mathbb{R}$ con derivada continua ($g \in C^1(\mathbb{R})$). Además, g se anula en los números enteros y en esos puntos su derivada es $\tilde{g}'(0) = 1$.

Consideremos la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n!x)}{(n!)^2}.$$

Como g' es continua y periódica, está acotada por alguna constante $M > 0$. La serie de las derivadas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g'(n!x)}{n!}$ está mayorada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!}$, la cual converge. Por el Test M de Weierstrass, f es diferenciable y su derivada es continua.

Sea $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (con $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$). Para todo $n \geq q$, se tiene que $n!x \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $g(n!x) = 0$. Por lo tanto, la serie para $f(x)$ se reduce a una suma finita:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{g(n!x)}{(n!)^2}.$$

Como g evalúa racionales en racionales, concluimos que $f(x) \in \mathbb{Q}$, por lo que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Por otro lado, evaluemos la derivada en $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Sabemos que para $n \geq q$, al ser $n!x$ un número entero, $g'(n!x) = 1$. Consideremos la diferencia entre $f'(x)$ y el número de Euler $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$:

$$f'(x) - e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g'(n!x)}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g'(n!x) - 1}{n!}.$$

Como $g'(n!x) - 1 = 0$ para todo $n \geq q$, la serie se trunca, obteniendo una suma finita:

$$f'(x) - e = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{g'(n!x) - 1}{n!} \in \mathbb{Q}.$$

Dado que la diferencia $f'(x) - e$ es un número racional, y e es irracional, se sigue necesariamente que $f'(x) \notin \mathbb{Q}$.

19. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ calcule explícitamente el punto que satisface el Teorema del Valor Medio, es decir, determine $c \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

Solución. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y notemos que $f'(x) = 2x$. Basta resolver

$$2c = f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

Por lo tanto, el punto $c \in (x, y)$ que buscamos es $c = \frac{x+y}{2}$.

20. Calcule la derivada Schwarziana de $f(x) = \lambda x(1 - x)$.

Solución. Como $f'(x) = \lambda - 2\lambda x$, $f''(x) = -2\lambda$ y $f'''(x) = 0$, por definición de la derivada Schwarziana,

$$Sf(x) = -\frac{6}{(1 - 2x)^2}.$$

21. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea Sf su derivada Schwarziana. Demuestre que si $Sf(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $|f'(x)|$ no alcanza su mínimo en (a, b) .

Solución. Dado que Sf está bien definida, podemos asumir que $f'(x)$ nunca es cero. Por contradicción, suponemos que $|f'|$ alcanza su mínimo en $x_0 \in (a, b)$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $f'(x_0) > 0$. Por tanto en una vecindad de x_0 tenemos que $f'(x_0) \leq f'(x)$ y por ende

$$0 \leq \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \quad \text{si } x > x_0.$$

De la misma forma se puede ver que

$$0 \geq \frac{f'(x_0) - f'(x)}{x_0 - x} \quad \text{si } x < x_0.$$

Luego como f es tres veces diferenciable, en particular es dos veces diferenciable y necesariamente $f''(x_0) = 0$. Por lo tanto, usando la definición de la derivada Schwarziana,

$$Sf(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} \right)^2 = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Además por hipótesis $Sf(x_0) < 0$ y como estamos considerando el caso que $f'(x_0) > 0$, entonces $f'''(x_0) < 0$. Esto nos da una contradicción, pues si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) < 0$ entonces x_0 es un máximo local de f' . Luego f' sería constante en una vecindad de x_0 y así $f'(x_0) = 0$. Esto contradice la hipótesis.

22. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función tres veces diferenciable. Demuestre que la derivada Schwarziana de f tiene signo opuesto de $(1/\sqrt{|f'|})''$.

Solución. Suponemos que $f'(x) \neq 0$ para que la derivada Schwarziana tenga sentido. Además, sin pérdida de generalidad asumimos que $f' > 0$. Calculando la derivada en el enunciado,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{f'}}\right)'' = \frac{1}{\sqrt{f'}} \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f'''(x)}{f'(x)} \right) = -\frac{1}{2} S(f) \frac{1}{\sqrt{f'}}$$

En particular, la derivada Schwarziana tiene el signo opuesto a $(1/\sqrt{f'})''$. El caso cuando f' es negativa se puede probar similarmente.

23. Sea $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función tres veces diferenciable tal que $Sf(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestre que si f posee un número finito de puntos críticos (es decir, de puntos donde se anula la derivada) entonces f posee un número finito de puntos periódicos atractores (o estables). El resultado anterior es conocido como Teorema de Singer (1978). Una demostración puede encontrarse en [22, p.69].

Solución. En lo que sigue denotaremos por f^m a la composición $f \circ f \circ \dots \circ f$ de la función f consigo misma m veces. Sea p un punto periódico atractor para f de período m , es decir, tal que $|(f^m)'(p)| < 1$. Sea $W(p)$ la componente conexa de $\{x \in [a, b] : \lim_{j \rightarrow \infty} f^{mj}(x) = p\}$ que contiene a p . Claramente $W(p)$ es un intervalo tal que $f^m(W(p)) \subset W(p)$.

Para p fijo, como $f^m(W(p)) \subset W(p)$ y $W(p)$ es maximal, o bien f^m preserva los extremos l y r de $W(p) = (l, r)$, o al menos uno de los extremos choca con la frontera del dominio (a o b). Para el caso en que los extremos están al interior del dominio, tenemos tres posibilidades límites:

$$f^m(l) = l \quad \text{y} \quad f^m(r) = r; \quad \text{o} \quad f^m(l) = r \quad \text{y} \quad f^m(r) = l; \quad \text{o} \quad f^m(l) = f^m(r).$$

Si $f^m(l) = l$ y $f^m(r) = r$, el gráfico de f^m (y el Teorema del Valor Medio) muestra que existen puntos x_1 y x_2 tales que $l < x_1 < p < x_2 < r$ donde $(f^m)'(x_1) = (f^m)'(x_2) = 1$. Pero como $(f^m)'(p) < 1$, esto implicaría que la derivada $(f^m)'$ tiene un mínimo local positivo en el intervalo (x_1, x_2) . Por un ejercicio anterior sabemos que si $Sf < 0$, entonces f (y sus iteradas, ya que la composición preserva la negatividad de la Schwarziana) no puede tener un mínimo local positivo ni un máximo local negativo para su derivada. Por lo tanto, para evitar esta contradicción, debe existir un punto crítico en el intervalo $(x_1, x_2) \subset W(p)$.

El segundo caso ($f^m(l) = r$ y $f^m(r) = l$) se resuelve de la misma forma al considerar f^{2m} . Para el tercer caso ($f^m(l) = f^m(r)$), por el Teorema de Rolle, f^m debe tener obligatoriamente un mínimo o máximo local estrictamente entre l y r . Por tanto, también habrá un punto crítico en $W(p)$.

Para los casos en que l o r coinciden con a o b , el argumento anterior se adapta considerando que estas cuencas son atraídas hacia p desde los bordes del dominio. En resumen: cada órbita periódica atractor atrae al menos a un punto crítico de f o a uno de los extremos del dominio a o b . Como hay finitos puntos críticos y solo dos extremos en $[a, b]$, existe un número finito de puntos periódicos atractores.

Ahora consideremos el caso en que $|(f^m)'(q)| = 1$ (puntos neutros). Si f tiene un punto fijo q tal que $f'(q) = 1$ (se puede considerar f^2 para el caso -1), demostraremos que q debe atraer puntos desde al menos un lado. Si q repeliera por ambos lados, tendríamos que $f(x) < x$ para $x < q$ y $f(x) > x$ para $x > q$. Esto implicaría que la función $g(x) = f(x) - x$ pasa de ser negativa a positiva, teniendo un mínimo en q , lo que fuerza a que $f'(q) = 1$ sea un mínimo local para f' . Esto nuevamente contradice que $Sf < 0$.

Por lo tanto, alrededor de q se satisface $|f'(x)| < 1$ por al menos uno de los lados, creando una cuenca de atracción lateral $W(q)$ que, por el mismo argumento anterior, debe tragar un punto crítico o un extremo del dominio. Concluimos así que el número total de órbitas periódicas estables o neutras está acotado por el número de puntos críticos más dos.

24. Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Estudie la convergencia del método de Newton–Raphson N_p . Notamos que $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, por lo tanto basta estudiar

$$N_p(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)} = \frac{2ax^3 + bx^2 - d}{3ax^2 + 2bx + c}.$$

Solución. El método de Newton-Raphson define un sistema dinámico discreto dado por la iteración de la función $N_p(x)$. Para estudiar su convergencia, analizamos sus puntos fijos y su comportamiento local y global.

1. *Puntos fijos y convergencia local:* Los puntos fijos de N_p corresponden exactamente a las raíces de $p(x)$, ya que $N_p(x) = x \iff p(x) = 0$. Para estudiar la estabilidad local, calculamos la derivada del operador de Newton:

$$N'_p(x) = \frac{d}{dx} \left(x - \frac{p(x)}{p'(x)} \right) = 1 - \frac{(p'(x))^2 - p(x)p''(x)}{(p'(x))^2} = \frac{p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}.$$

Sea α una raíz de $p(x)$.

- Si α es una raíz simple (es decir, $p(\alpha) = 0$ y $p'(\alpha) \neq 0$), entonces evaluando la derivada obtenemos $N'_p(\alpha) = 0$. Por lo tanto, α es un punto fijo superatractor. El método converge localmente hacia α con orden cuadrático.
- Si α es una raíz múltiple de multiplicidad $m > 1$, mediante el uso de la regla de L'Hôpital se puede verificar que $\lim_{x \rightarrow \alpha} N'_p(x) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$. El punto α sigue siendo un atractor, pero la convergencia pierde su rapidez y se vuelve puramente lineal.

2. *Puntos críticos y dinámica global:* Para determinar el comportamiento global del algoritmo, es fundamental estudiar la órbita de los puntos críticos de N_p . De la fórmula de la derivada, notamos que $N'_p(x) = 0$ implica que $p(x) = 0$ o bien $p''(x) = 0$. Como $p(x)$ es un polinomio cúbico, su segunda derivada es la función afín $p''(x) = 6ax + 2b$. Esto indica que, además de las propias raíces del polinomio, la función iterada N_p posee un único punto crítico *libre* (que coincide con el punto de inflexión de p) dado por:

$$x_c = -\frac{b}{3a}.$$

3. *Cuencas de atracción y Teorema de Barna:* La dinámica global de N_p está controlada por la órbita de este punto crítico libre x_c .

- Si $p(x)$ tiene tres raíces reales distintas, el Teorema de Barna asegura que el método converge a una de las raíces para casi toda condición inicial en $\mathbb{R}$. El conjunto de puntos que no convergen a ninguna raíz (donde la dinámica es caótica) forma un conjunto de Cantor invariante de medida de Lebesgue nula.
- Si existiera un ciclo periódico atractor distinto de las raíces de p , la teoría clásica de Fatou asegura que la órbita del punto crítico libre x_c debe ser atraída por dicho ciclo.

En conclusión, la convergencia está estrictamente garantizada sólo si la semilla inicial se toma en una vecindad suficientemente pequeña de las raíces. Fuera de estas zonas locales, la iteración puede ser capturada por raíces lejanas, divergir si la órbita aterriza en las preimágenes de las raíces de $p'(x)$ (donde se anula el denominador), o exhibir dinámica caótica en un conjunto fractal de medida nula.

25. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que la n -ésima derivada de f en $x = 0$ es nula.

Solución. Primero, como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, la función f es continua en $x = 0$. Luego, como $f(x) = e^{q(1/x)}$ donde $q(x) = -x^2$ es un polinomio, se puede verificar por inducción que

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2},$$

para algún polinomio P_n . Además se tiene que $x^{-m}e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En particular $f^{(n)}(x)$ es continua en cero. Ahora, por definición,

$$f^{n+1}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_n(1/x)}{x} e^{-1/x^2} = 0.$$

Por lo tanto $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

26. Sean $a \in (c, d)$ y $f, g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones dos veces diferenciables tales que $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$. Demuestre que si para todo $x \in (c, d)$ se tiene $f(x) \geq g(x)$ entonces $f''(a) \geq g''(a)$.

Solución. Consideremos la función $h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$. De las hipótesis tenemos que h es dos veces diferenciable. Además, $h(a) = 0$, $h'(a) = 0$ y $h(x) \geq 0$ para todo $x \in (c, d)$. Por lo tanto h posee un mínimo en $x = a$. Luego, $h''(a) \geq 0$, por lo tanto $f''(a) \geq g''(a)$.

27. Construya, si existe, una función $f(x)$ infinitamente diferenciable, distinta a la exponencial, e^x , tal que $f(0) = 1$ y para todo $n \geq 1$ se tiene que $f^{(n)}(0) = 1$.

Solución. Sea $c \in \mathbb{R}$, y definamos $f(x) = e^x + cg(x)$, donde g es la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Por el Ejercicio 25 la función g es infinitamente diferenciable. Además $g^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, se tiene lo pedido.

28. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Pruebe que f es constante.

Solución. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Para todo $x \neq x_0$, tenemos que $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^2$. Por lo tanto

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|.$$

Tomando el límite cuando $x \rightarrow x_0$, tenemos que $f'(x_0)$ existe para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Así, hemos probado que f es diferenciable, y además $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto f es constante. Se puede verificar directamente que toda función constante satisface la hipótesis del enunciado.

29. Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Suponga que la segunda derivada es acotada y que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Solución. Como la segunda derivada es acotada, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in (0, +\infty)$ tenemos que $|f''(x)| < M$. Sea $x > 0$ and $h > 0$. Por el Teorema de Taylor, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta h)\frac{h^2}{2}.$$

De aquí se tiene que

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{Mh}{2}.$$

Sea h suficientemente pequeño tal que $\frac{Mh}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Además $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon h}{2}$ y $|f(x+h)| \leq \frac{\varepsilon h}{2}$ para x suficientemente grande. Por lo tanto, concluimos que $|f'(x)| \leq \varepsilon$ para x suficientemente grande.

30. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{(\sin x) - x}.$$

Solución. Aplicando la regla de L'Hopital tres veces obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{(\sin x) - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)e^{\sin x} - e^x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x} - e^x}{-\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\cos x \sin x - \cos x)e^{\sin x} + (\cos x)(\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x} - e^x}{-\cos x} = 1. \end{aligned}$$

31. Demuestre que la siguiente función, que es positiva en el intervalo unitario y nula fuera de el, es infinitamente diferenciable

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2(1-x)^2} & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

Solución. Primero notamos que la función f es infinitamente diferenciable para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Falta probar que la función es infinitamente diferenciable en $\{0, 1\}$. Dado que fuera del intervalo $(0, 1)$ la función f es idénticamente cero, basta verificar que todas las derivadas de f son cero en $\{0, 1\}$.

Utilizado descomposición en fracciones parciales tenemos que,

$$\exp\left(\frac{-1}{x^2(x-1)^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \exp\left(-\frac{2}{x}\right) \exp\left(\frac{2}{x-1}\right).$$

Por el Ejercicio 25, y extendiendo este a la función

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

es fácil probar que todas las derivadas de f se anulan en $\{0, 1\}$. De aquí se concluye.

32. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que existe $M > 0$ de modo que si $x \in \mathbb{R}$ entonces $|f'(x)| \leq M$. Demuestre que existe $\varepsilon > 0$ tal que la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + \varepsilon f(x)$ es inyectiva.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $1/\varepsilon > M$. Notemos que, como $f'(x) \geq -M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $g'(x) = 1 + \varepsilon f'(x) \geq 1 - \varepsilon M > 0$. Ahora, como la derivada de g es positiva, la función es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva.

33. Supongamos que f es una función diferenciable para todo $x > 0$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

Sea $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Solución. Notemos que para cada $x > 0$, por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi(x) \in (x, x+1)$ tal que

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x) = g(x).$$

Y como $\xi(x) > x$ tenemos que $\xi(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Por tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi(x)) = 0$.

34. Sea $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = M_1, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = M_2, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| = M_3.$$

Demuestre que

$$M_2^2 \leq 2M_1M_3.$$

Solución. Sea $x > a$ y $h > 0$ tal que $x > h + a$. Por el Teorema de Taylor, existen $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tales que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta_1h)\frac{h^2}{2},$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x-\theta_2h)\frac{h^2}{2}.$$

Restando ambas igualdades y dividiendo por $2h$ obtenemos,

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)) + \frac{h}{4}(f''(x-\theta_2h) - f''(x+\theta_1h))$$

Ahora, usando desigualdad triangular y tomando el supremo en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_1}{h} + \frac{h}{2}M_3$$

Por último escogemos $h = \sqrt{2\frac{M_1}{M_3}}$ de donde se obtiene la desigualdad deseada.

35. Derivando, verifique que si $x \in (-1, 1)$, entonces

$$f(x) = \arcsen x + \arccos x$$

es constante.

Solución. Notemos que $\arcsen'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Por lo tanto, se tiene $f'(x) = 0$. Luego, f es una función constante.

36. Determine máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-1)^2(3x^2-2x-37)}{(x+5)^2(3x^2-14x-1)}.$$

Solución. Notemos que

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}$$

y

$$p'(x)q(x) - p(x)q'(x) = 72(x-3)(x+2)(x+5)(x-1)(x-7)(x+1).$$

Por lo tanto, los puntos críticos de la función f son $\{-2, -1, 1, 3, 7\}$. Para determinar si son máximos o mínimos locales los evaluamos en la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{72(6x^7 - 87x^6 + 324x^5 - 353x^4 - 778x^3 - 921x^2 + 992x + 6001)}{(x+5)^4(3x^2-14x-1)^3}.$$

De donde $f''(-2) = 40/169 > 0$, $f''(-1) = -9/32 < 0$, $f''(1) = 1/6 > 0$, $f''(3) = -45/512 < 0$ y $f''(7) = 1/32 > 0$. Por lo tanto los máximos se alcanzan en $x \in \{-1, 3\}$ y los mínimos se alcanzan en $x \in \{-2, 1, 7\}$.

37. Sea

$$f(x) = \frac{1}{\sin x - \sin a} - \frac{\sec a}{x - a},$$

demuestre que

$$\frac{d}{da} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) - \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \frac{1}{3} \sec^3 a - \frac{5}{12} \tan^2 a \sec a.$$

Solución. Notamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{2} \tan a \sec a$ y $f'(x) = \frac{\sec a}{(x-a)^2} - \frac{\cos x}{(\sin x - \sin a)^2}$. Por lo tanto, podemos calcular

$$\frac{d}{da} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \frac{1}{2} \sec^3 a + \frac{1}{2} \sec a \tan^2 a, \quad \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \frac{1}{6} \sec^3 a + \frac{1}{12} \tan^2 a \sec a.$$

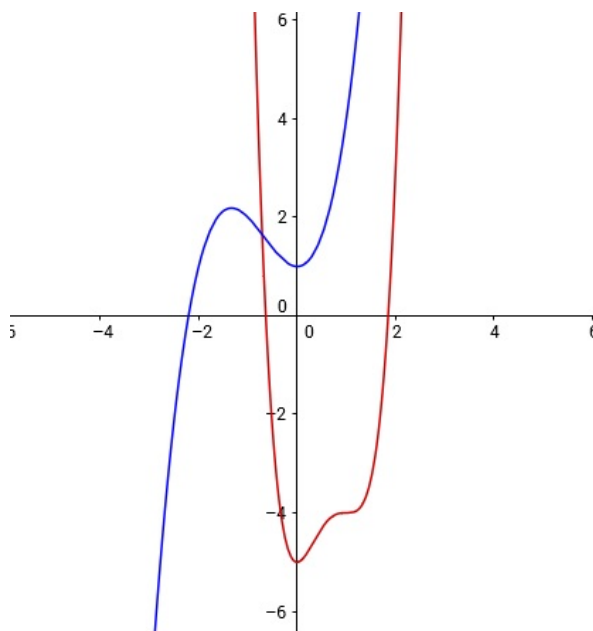
Ahora, restando ambas identidades se obtiene el resultado.

38. Graficando las siguientes funciones, determine el número de raíces reales de los polinomios

a) $p(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5$,

b) $q(x) = x^3 + 2x^2 + 1$.

Solución. En los siguientes gráficos, se puede ver que p (color rojo) tiene dos raíces reales, mientras que q (color azul) tiene solo una.



39. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$. Definimos $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$. Demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{m}{n} = \frac{c-a}{b-c}.$$

Solución. Notemos que

$$f'(x) = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}(m(x-b) + n(x-a)).$$

Además, $f(a) = 0 = f(b)$. Por el Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Como $c - a$ y $c - b$ son distintos de cero, se tiene $m(c - b) + n(c - a) = 0$. Esto es

$$\frac{m}{n} = \frac{c - a}{b - c}.$$

40. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que su gráfico intersecta cualquiera de sus rectas tangentes en un único punto. Demuestre que ninguna recta intersecta el gráfico de f en tres puntos distintos.

Solución. Supongamos, por el contrario, que existe una recta que intersecta el gráfico de f en los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$, con $a < b < c$. Como estos tres puntos pertenecen a una misma recta las siguientes pendientes coinciden:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Sea $g : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como g es diferenciable y $g(b) = g(c)$, tenemos por el Teorema de Rolle que existe $x_1 \in (b, c)$ tal que $g'(x_1) = 0$. Así

$$0 = (x_1 - a)f'(x_1) - (f(x_1) - f(a)).$$

Luego, la recta tangente a f en x_1 viene dada por

$$L(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Así

$$L(a) = - \left(\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \right) (x_1 - a) + f(x_1) = f(a).$$

Por lo tanto la recta tangente a f en x_1 pasa por el punto $(a, f(a))$. Esta contradicción prueba el resultado.

41. Determine las asíntotas de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}.$$

Solución. Como

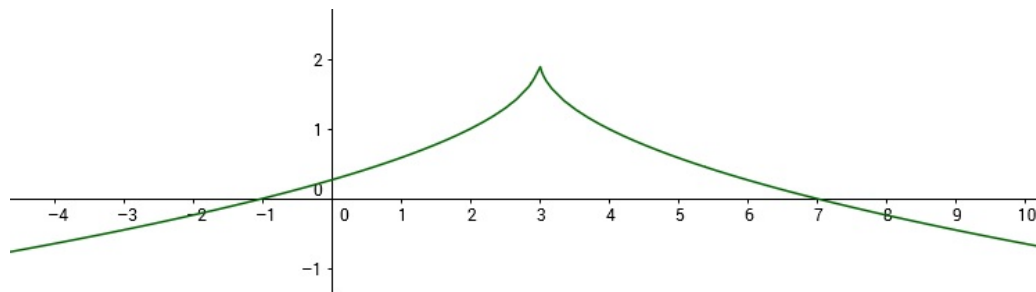
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x - 4}{x + 1} = -1,$$

la función f posee la misma asíntota oblicua hacia $+\infty$ y $-\infty$ dada por $y = x - 1$. Por último observamos que $x = -1$ es asíntota vertical.

42. Grafique la función $f(x) = 2 - \sqrt{|x - 3|}$.



43. Demuestre que si $x > 3$ entonces

$$e^3(x-3) < e^x - e^3 < e^x(x-3).$$

Solución. Notemos que si $x > 3$, por Teorema del Valor Medio, existe $c \in (3, x)$ tal que

$$e^c = (e^x)'_{x=c} = \frac{e^x - e^3}{x - 3}.$$

Como la función exponencial es creciente, tenemos que $e^3 < e^c < e^x$. Por lo tanto

$$e^3(x-3) < e^x - e^3 < e^x(x-3).$$

44. Demuestre que si $x > 0$ entonces

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

Solución. Consideremos la función $g(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$. Como $g'(x) = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$ tenemos que si $x > 0$ entonces $g'(x) > 0$. Es decir, la función g es creciente. Como $g(0) = 0$ tenemos que si $x > 0$ entonces $g(x) > 0$, de donde se tiene la primera desigualdad. Análogamente, definimos $h(x) = x - \arctan x$ y notemos que $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$. Por lo tanto h también es creciente y $h(0) = 0$. Entonces si $x > 0$, se tiene $h(x) > 0$, de donde se obtiene la segunda desigualdad.

45. Determine los máximos y mínimos (si existen) de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{10}{1 + \sin^2 x}, \quad g(x) = |x|e^{-|x-1|}.$$

Solución. Primero estudiamos la función f . Esta función está definida en $\mathbb{R}$ y se puede derivar tantas veces como uno quiera. Procedemos calculando los puntos críticos de la función. Observamos que la derivada

$$f'(x) = -\frac{20 \sin(x) \cos(x)}{(1 + \sin^2(x))^2}$$

se anula cuando $x = k\pi/2$ para $k \in \mathbb{Z}$. Además tenemos que

$$f''(x) = \frac{20(2\cos^4(x) + \cos^2(x) - 2)}{\cos^6(x) - 6\cos^4(x) + 12\cos^2(x) - 8}.$$

En los puntos de la forma $x = k\pi$ tenemos que $f''(x) = -20 < 0$, por lo tanto en estos puntos la función alcanza un máximo local. Por otra parte, en los puntos de la forma $x = \pi/2 + k\pi$ se tiene $f''(x) = 5 > 0$, luego en esos puntos la función alcanza un mínimo local. Por último observamos que los mínimos locales son mínimos globales con mínimo $f(\frac{\pi}{2}) = 5$, y por otra parte los máximos locales son máximos globales con máximo $f(0) = 10$.

Ahora estudiamos la función g . Primero notamos que la función g esta definida por tramos,

$$g(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & x \in (-\infty, 0) \\ xe^{x-1} & x \in [0, 1) \\ xe^{1-x} & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Esta función esta definida en $\mathbb{R}$ y se puede derivar tantas veces como uno quiera en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Si $x \in (-\infty, 0)$ entonces $g'(x) = -xe^{x-1} - e^{x-1}$ se anula solamente en $x = -1$. En el intervalo $[0, 1)$ la derivada no se anula. En $x \in [1, +\infty)$ se tiene $g'(x) = e^{1-x}(1-x)$ que se anula solamente en $x = 1$. Luego los candidatos para máximos o mínimos locales son $x = -1, 0, 1$.

Analizando g' , tenemos que g es creciente en $[0, 1)$ y decreciente en $[1, +\infty)$, luego $x = 1$ es un máximo local con máximo $g(1) = 1$. De la misma forma se puede verificar que en $x = -1$ se alcanza un máximo local cuyo máximo es $f(-1) = e^{-2}$. Por último se puede verificar de la misma forma que f tiene un mínimo local en $x = 0$ con mínimo $g(0) = 0$. Para finalizar observamos que g es no negativa. Luego el mínimo global de g se alcanza en $x = 0$. Por otra parte, $g(-1) = e^{-2} < 1 = g(1)$. Luego el máximo global de g se alcanza en $g(1) = 1$.

46. Determine el mínimo de la función $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} + \ln(x^3 + 1).$$

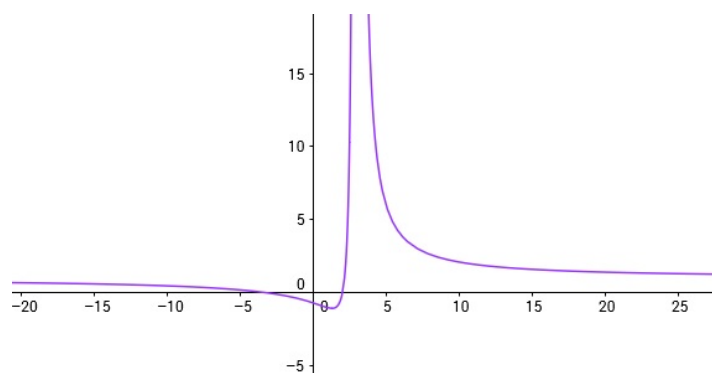
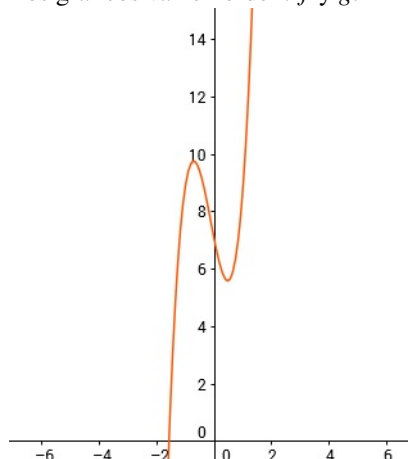
Solución. Notemos que $f'(x) = \frac{3x^5}{(x^3+1)^2}$. Por lo tanto, si $x > 0$ entonces $f'(x) > 0$. Además, si $x \in (-1, 0)$ entonces $f'(x) < 0$. Es decir, la función f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-1, 0)$ y estrictamente creciente en el intervalo $(0, +\infty)$. Luego, el mínimo de f se alcanza en $x = 0$ y $f(0) = 1$.

47. Grafique las siguientes funciones

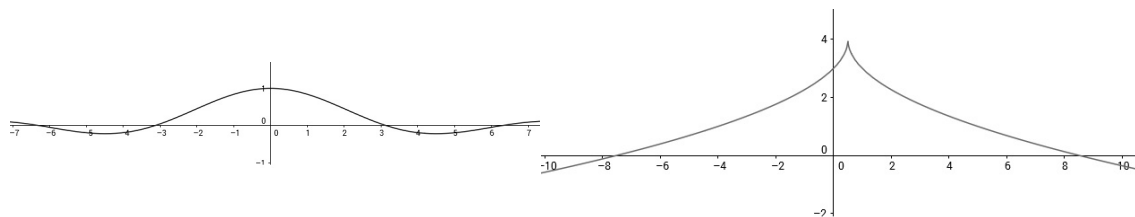
a) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 7$, $g(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+9}$.

b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = 4 - \sqrt{|2x-1|}$.

- a) Los gráficos van en orden: f y g .



- b) Los gráficos van en orden: f y g .



48. Calcule los siguientes límites

$$\begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sen x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x)^{\ln(x+1)}, \\ b) & \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(\ln(1/x)), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |\ln x|^{\ln(1-1/x)}. \end{aligned}$$

Solución.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot(x)^{\sen(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x)^{\ln(x+1)} = 1.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(\ln(1/x)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |\ln(x)|^{\ln(1-1/x)} = 1.$$

49. Utilizando la expansión en serie de Taylor del número e , pruebe que es irracional.

Solución. Recordemos que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Por contradicción suponemos que $e = a/b$ es racional con a y b números naturales coprimos. Definimos el número

$$x := b! \left(e - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right) = b! \left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^b \frac{b!}{n!}.$$

Además notamos que $x \in \mathbb{Z}$. Para concluir probaremos que necesariamente $x \in (0, 1)$. Como

$$x = b! \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0,$$

por lo que $x > 0$. Además como

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1) \cdots (b+(n-b))} < \frac{1}{(b+1)^{n-b}},$$

entonces

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} \leq \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \frac{1}{b} < 1.$$

Con esto se obtiene la contradicción.

50. Sean $a < b$ tales que $\cos a \neq \cos b$. Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\cot c = \frac{\sen b - \sen a}{\cos a - \cos b}.$$

Solución. Sean $f(x) = \sen(x)$ y $g(x) = \cos(x)$. Por el Teorema del Valor Medio Generalizado, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{\sen b - \sen a}{\cos b - \cos a} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{\cos c}{\sen c} = -\cot c.$$

51. Determine máximos y mínimos de $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^x$.

Solución. Notemos que $f'(x) = x^x(\log x + 1) \neq 0$ para todo $x \in (1, \infty)$, por lo tanto la función no tiene puntos críticos. Además, como la derivada siempre es estrictamente positiva, el dominio no considera el 1 y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, se concluye que la función no alcanza máximo ni mínimo en $(1, \infty)$.

52. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable tal que $f'(a) = f'(b) = 0$. Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} (f(b) - f(a)).$$

Solución. Sea $h = (b-a)/2$. Por el Teorema de Taylor existe $x_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ tal que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(x_1)}{2}h^2 = f(a) + \frac{f''(x_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

dado que $f'(a) = 0$. Del mismo modo, existe $x_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ tal que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b-h) = f(b) + f'(b)h + \frac{f''(x_2)}{2}h^2 = f(b) + \frac{f''(x_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

dado que $f'(b) = 0$. Por lo tanto,

$$|f(b) - f(a)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{1}{2} |f''(x_2) - f''(x_1)| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \max\{|f''(x_1)|, |f''(x_2)|\}.$$

Luego, o bien $c = x_1$ o $c = x_2$ satisface la propiedad pedida, es decir,

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} (f(b) - f(a)).$$

53. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L,$$

y para cada $c > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+c) - f(x)) = cL.$$

Solución. Sin pérdida de generalidad suponemos que $L > 0$. Por definición del límite $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = L$, para todo $\varepsilon_0 > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x > x_0$ tenemos que

$$L - \varepsilon_0 < f'(x) < L + \varepsilon_0.$$

En lo que sigue consideraremos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $L - \varepsilon_0 > 0$. Además, por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

Entonces, podemos escribir, para $x > x_0$,

$$\frac{f(x_0)}{x} + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)(L - \varepsilon_0) < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x_0)}{x} + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)(L + \varepsilon_0).$$

Haciendo $x \rightarrow \infty$ se tiene que para todo $\varepsilon > 0$,

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < L + \varepsilon$$

y por lo tanto el límite existe y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

Además dado $c > 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$, por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi_x \in (x, x+c)$ tal que

$$f(x+c) - f(x) = c \cdot f'(\xi_x).$$

Como $\xi_x > x$, cuando x tiende a infinito, ξ_x también, por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+c) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} c \cdot f'(\xi_x) = cL.$$

54. Sea $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Determine el mínimo de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - x)^2.$$

Solución. Por definición f es un polinomio cuadrático no negativo. Por ende f tiene un único mínimo en un número x_0 donde $f'(x_0) = 0$. Además, se tiene que

$$f'(x_0) = -2 \sum_{i=1}^n (a_i - x_0) = 0$$

si y solo si $x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$. Por lo tanto el mínimo de f es $f(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i)$.

55. Sea $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$ calcule la derivada de orden 2001 en el punto $x = 0$.

Solución. Para $|x| < 1$, por la serie geométrica

$$\frac{x^5}{1+x^6} = x^5 \cdot \frac{1}{1-(-x^6)} = x^5 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{6k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{6k+5}.$$

Notemos que $2001 = 6 \cdot 333 + 3 \neq 6k + 5$ para todo $k \geq 0$, por lo tanto el coeficiente que acompaña a x^{2001} es 0. Ahora bien, por el Teorema de Taylor, el coeficiente que acompaña a 2001 es $f^{(2001)}(0)/(2001!)$. Así, concluimos que $f^{(2001)}(0) = 0$.

56. Demuestre que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, diferenciable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $x \in (a, b)$ tal que

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0.$$

Solución. Consideremos la función definida por $h(x) = e^{\alpha x} f(x)$, $x \in [a, b]$. Notemos que $h(a) = 0 = h(b)$ y $h'(x) = e^{\alpha x} (\alpha f(x) + f'(x))$. Por Teorema de Rolle, se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Esto es $\alpha f(c) + f'(c) = 0$, con lo que concluye la demostración.

57. Sea $P(x)$ un polinomio de grado al menos dos cuyas raíces son reales y distintas. Pruebe que todas las raíces de $P'(x)$ son reales.

Solución. Por el Teorema de Rolle entre dos ceros de un polinomio hay al menos un cero de P' . Sea $n := \text{grado}(P)$. Luego como P tiene todas sus raíces distintas, P' tiene al menos $n - 1$ raíces reales. Pero como $\text{grado}(P') = n - 1$, necesariamente, estas son todas sus raíces.

58. El siguiente ejemplo fue considerado por Cohen en [6]. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Definamos

$$\frac{df}{dg} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)}.$$

Si $g(x) = x$ recuperamos la definición clásica de derivada. Determine funciones crecientes f y g de modo que para $x = 0$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{1}{2}.$$

Solución. El siguiente par de funciones satisface lo pedido.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -1+x & \text{si } x < 0; \\ 1+x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

59. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Diremos que el punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es un *cero denso* de f , si para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ contiene un cero de la función f .

- a) Construya una función f que posea un cero denso.
b) Suponga que la segunda derivada de f es continua. Demuestre que en tal caso si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un cero denso de f entonces $x_0 \in \mathbb{R}$ es un cero denso de f' .

El resultado anterior fue probado por Creighton en [8].

Solución. Para la parte a) consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función f es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pues es una composición de funciones diferenciables. Además f es diferenciable en 0 pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Por otra parte $x = 0$ es un cero denso de f . En efecto, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_k = (k\pi)^{-1}$ satisface $f(x_k) = 0$, y la sucesión $\{x_k\}_k$ converge a cero.

Ahora probamos b). Entre cada par de ceros de f hay un cero de f' por el Teorema de Rolle. Sabemos que existe una sucesión de ceros $(c_n)_n$ para f tal que $c_n \rightarrow x_0$. Por lo tanto podemos construir una sucesión de ceros $(d_n)_n$ de f' que converge a x_0 . Es decir, x_0 es un cero denso de f' .

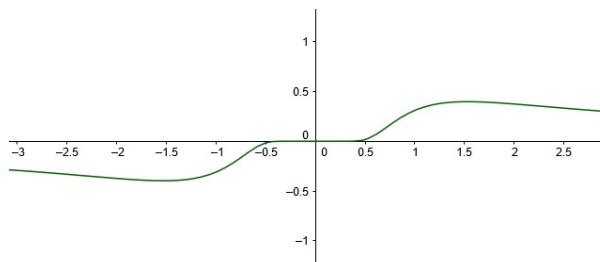
60. Determine máximos y mínimos de la función definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

Solución. Notemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ y que f es diferenciable en $\mathbb{R}$. Como $f'(x) = 2e^{-1/x^2}/x^3 \neq 0$ para todo $x \neq 0$, el único candidato a máximo o mínimo es $x = 0$. Por último notamos que $1 > f(x) \geq 0 = f(0)$. Por lo tanto el único mínimo es $f(0) = 0$ y como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, la función no tiene ningún máximo.

61. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Solución.



62. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f'(x) = -2xf(x).$$

Demuestre que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = Ce^{-x^2}$.

Solución. Notemos que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{e^{-x^2}} \right) = \frac{f'(x)e^{-x^2} + 2xf(x)e^{-x^2}}{(e^{-x^2})^2} = 0.$$

Por lo tanto, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)/e^{-x^2} = C$.

63. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f_0, \dots, f_n$ polinomios tales que para $x \in \mathbb{R}$ suficientemente grande se tiene que

$$f_n(x)e^{nx} + f_{n-1}(x)e^{(n-1)x} + \dots + f_0(x) = 0.$$

Demuestre que los polinomios $f_0, \dots, f_n$ son idénticamente nulos.

Solución. Dividiendo la relación por e^{nx} obtenemos

$$f_n(x) + f_{n-1}(x)e^{-x} + \dots + f_0(x)e^{-nx} = 0.$$

Ahora, como todo f_j es un polinomio, tenemos que para todo $1 \leq k \leq n$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{n-k}(x)e^{-kx} = 0.$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, de donde se concluye que f_n es idénticamente 0. Ahora por inducción vemos que f_j es idénticamente 0 para todo $0 \leq j \leq n$.

64. Sean $f, g, h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que para todo $x \in (0, 1)$ se tiene que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Si f y g son diferenciables en el punto $a \in (0, 1)$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$, demuestre que h es diferenciable en $x = a$ con $h'(a) = f'(a)$.

Solución. Supongamos, en primer lugar, que $x \in (0, a)$. Tenemos $f(a) = g(a) \geq h(a) \geq f(a)$, por lo tanto $f(a) = g(a) = h(a)$. Entonces $f(x) - f(a) \leq h(x) - h(a) \leq g(x) - g(a)$. Ahora, dividimos por $x - a < 0$, lo que nos invierte la desigualdad

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \geq \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Haciendo $x \rightarrow a^-$, se tiene $f'(a) \geq h'_-(a) \geq g'(a)$. Análogamente, si $x \in (a, 1)$ entonces $f'(a) \leq h'_+(a) \leq g'(a)$. Como $f'(a) = g'(a)$, se concluye que $h'_-(a) = h'_+(a) = h'(a) = f'(a)$.

65. Sea $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. La función f se dice *par* si para todo $x \in [-a, a]$ se tiene que $f(-x) = f(x)$ e *impar* si para todo $x \in [-a, a]$ se tiene que $f(-x) = -f(x)$.
- a) De ejemplos de funciones pares e impares.
- b) Suponga que f es infinitamente diferenciable. Si f es par entonces todas sus derivadas de orden par son funciones pares y todas sus derivadas de orden impar son funciones impares.

Solución. Para la parte a) vemos que x^n con n par, y la función coseno son todas pares. Por otra parte x^n con n impar, y la función seno son todas impares.

Para b) partimos asumiendo que f es par. Por tanto derivando,

$$f(x) = f(-x) \implies f'(x) = -f'(-x) \implies f''(x) = f''(-x).$$

Inductivamente, tenemos que $f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$, de donde se concluye el resultado.

66. Determine si el producto y la suma de funciones cóncavas hacia arriba es cóncavas hacia arriba.

Solución. Por definición, tenemos

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ &= \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de funciones cóncavas hacia arriba también lo es. Por otra parte, sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, estas dos funciones son cóncavas hacia arriba, sin embargo su producto $(f \cdot g)(x) = x^3$ no lo es.

67. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Pruebe que existe un único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Solución. Probaremos, en primer lugar, que toda función convexa, finita, definida en un intervalo abierto es continua. Recordemos que una función f se dice convexa si para todos $u < r < v$ en $[a, b]$ se cumple que

$$\frac{f(r) - f(u)}{r - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}.$$

Sea ahora $x \in (a, b)$ y $a < x < v < b$. Entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Esto implica que

$$f(x) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(v - x) \leq f(v) \leq f(x) + \frac{f(b) - f(x)}{b - x}(v - x).$$

Con esto $\lim_{v \rightarrow x^+} f(v) = f(x)$, $\lim_{v \rightarrow x^-} f(v) = f(x)$. Luego, como f es continua existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Supongamos que existe $c' > c$ tal que $f(c') = 0$. Como f es convexa y $a < c < c'$ tenemos que

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c') - f(a)}{c' - a}.$$

Es decir,

$$-\frac{f(a)}{c-a} \leq -\frac{f(a)}{c'-a}.$$

Como $f(a) < 0$ tenemos que $|f(a)| = -f(a)$. Luego $|f(a)|(c' - a) \leq |f(a)|(c - a)$. De donde, $c' \leq c$. Esta contradicción prueba la afirmación.

68. Una función $f: [0, b] \rightarrow [0, b]$ es *super-aditiva* si para todo $x, y \in [0, b]$ se tiene que $f(x) + f(y) \leq f(x+y)$. Demuestre que si f es una función convexa y $f(0) \leq 0$, entonces es super-aditiva.

Solución. Por definición f es convexa si para todo $x, y \in [0, b]$ y todo $t \in [0, 1]$ se satisface

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si consideramos $y = 0$ en la expresión anterior,

$$f(tx) = f(tx + (1-t) \cdot 0) \leq tf(x) + (1-t)f(0) \leq tf(x) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por lo tanto,

$$f(x) + f(y) = f\left((x+y)\frac{x}{x+y}\right) + f\left((x+y)\frac{y}{x+y}\right) \leq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(x+y) = f(x+y).$$

69. Pruebe que $p(x) = x^3 + 2x + 5$ es estrictamente creciente. Calcule la derivada de la función inversa en el punto $p(-2)$.

Solución. Notemos que $p'(x) = 3x^2 + 2 \geq 2$, luego la derivada es estrictamente positiva y por tanto la función p es estrictamente creciente. Por otra parte, si f es la inversa de la función p , entonces por la regla de la cadena $f'(p(x)) \cdot p'(x) = 1$. Así, tenemos

$$f'(p(-2)) = \frac{1}{p'(-2)} = \frac{1}{3(-2)^2 + 2} = \frac{1}{14}.$$

70. Los siguientes polinomios representan los polinomios de Taylor de orden 3 en torno a $x = 0$ de las funciones f y g :

$$p_f(x) = 1 + 2x - x^2 + 4x^3, \quad p_g(x) = x - x^2 + 2x^3.$$

- a) Determine el polinomio de Taylor de orden 3 en torno al origen de $f(x)g(x)$ y de $f(g(x))$.
b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - 2x}{g(x) - x}.$$

Solución. Por definición del polinomio de Taylor tenemos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -2$, $f'''(0) = 24$ y $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = -2$, $g'''(0) = 12$. Luego para calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de fg , basta calcular $(fg)(0)$, $(fg)'(0)$, $(fg)''(0)$ y $(fg)'''(0)$. Con estos números se verifica que $p_3(x) = x + x^2 - x^3$.

Para la composición basta calcular $(f \circ g)(0)$, $(f \circ g)'(0)$, $(f \circ g)''(0)$ y $(f \circ g)'''(0)$. Con estos números se verifica que $p_3(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 10x^3$.

Para b) basta considerar los polinomios de Taylor en el límite, pues los errores en la aproximación convergen a cero. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - 2x}{g(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 4x^3}{-x^2 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + 4x}{-1 + 2x} = 1.$$

71. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, positiva y creciente y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, negativa y decreciente. Pruebe que la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \frac{f(g(x))}{g(x)},$$

es creciente.

Solución. Basta notar que la derivada de la función h es estrictamente positiva. Por hipótesis, tenemos que $f' > 0$ y $g' < 0$. Así,

$$h'(x) = \frac{\overbrace{f'(g(x))}^{>0} \overbrace{g'(x)g(x)}^{>0} - \overbrace{g'(x)f(g(x))}^{<0}}{\underbrace{g(x)^2}_{>0}} > 0.$$

72. Sea $f(x) = e^x \sin x$. Determine el polinomio de Taylor de f de grado cuatro alrededor del punto $x = 0$.

Solución. Observemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ f''(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x \\ f'''(x) &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x \\ f^{(4)}(x) &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x = -4e^x \sin x. \end{aligned}$$

Así,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 2 \quad \text{y} \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

por lo tanto el polinomio de Taylor de grado cuatro es

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

73. Sea $n \in \mathbb{N}$. Considere la función

$$f(x) = \frac{(x+n)^2}{x}.$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento (y decrecimiento) de f .
b) Determine los máximos y mínimos de f .

Solución. Notemos que la función está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Además, tenemos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty$, por lo tanto la función no tiene mínimo ni máximo global. Ahora $f'(x) = \frac{x^2 - n^2}{x^2}$, por lo tanto los puntos críticos de la función son $x = \pm n$. Para determinar si se alcanzan máximos o mínimos locales notamos que $f''(x) = 2n^2/x^3$, de donde $f''(n) = 2/n > 0$ y $f''(-n) = -2/n < 0$. Luego, la función alcanza un máximo local en $x = -n$ y un mínimo local en $x = n$, cuyos valores son $f(-n) = 0$ y $f(n) = 4n$. Finalmente, observamos que $f'(x) = \frac{(x+n)(x-n)}{x^2}$ es positiva en $x \in (-\infty, -n) \cup (n, \infty)$ y negativa en $x \in (-n, 0) \cup (0, n)$. Estos son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , respectivamente.

74. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $x = 0$ y determine si es diferenciable en este punto.

Solución. Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 1 \cdot 0 = 0 = f(0),$$

por lo tanto la función f es continua en $x = 0$. Por otra parte,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \sin(1/x).$$

Recordemos que $\lim_{x \rightarrow 0} x/\sin(x) = 1$. Por otra parte la sucesión $x_n = 1/(\frac{\pi}{2} + n\pi)$ converge a cero y es tal que

$$\sin(1/x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{2n}) - f(0)}{x_{2n} - 0} = 1 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{2n-1}) - f(0)}{x_{2n-1} - 0} = -1,$$

y concluimos que f no es diferenciable en $x = 0$.

75. Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule la derivada con respecto a x de $y(x) = \arctan\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$.

Solución. Tenemos que

$$y'(x) = \frac{1}{1 + \frac{e^{2x}}{x^{2n}}} \cdot \frac{e^x x^n - n x^{n-1} e^x}{x^{2n}} = \frac{e^x (x^n - n x^{n-1})}{x^{2n} + e^{2x}}.$$

76. Sea $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$. Demuestre que f tiene exactamente una raíz real.

Solución. Notemos que $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, por lo tanto la función es estrictamente creciente. Además tenemos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, pues el grado del polinomio es impar. Entonces, f intersecta una sola vez al eje x .

77. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tal que $f(a) = a$, $f(b) = b$, y además para todo $x \in (a, b)$ se tiene $|f'(x)| \leq 1$. Demuestre que para todo $x \in [a, b]$ se tiene $f(x) = x$.

Solución. Supongamos que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > x_0$. Por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in (a, x_0)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > \frac{x_0 - a}{x_0 - a} = 1,$$

lo que es una contradicción con la hipótesis. El caso $f(x_0) < x_0$ es análogo.

78. Sea $f(x)$ diferenciable en $(0, \infty)$ tal que

$$f(2x) = 2f(x).$$

Demuestre que para todo $x \in (0, \infty)$ existe $c > x$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x)}{x}.$$

Solución. Dado $x \in (0, \infty)$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (x, 2x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{2f(x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(x)}{x}.$$

79. Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^3 + 7x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Demuestre que la función no tiene rectas tangentes paralelas a la recta $y = 4x$.

Solución. Observamos que f es continua pues $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5 = f(0)$. Sean $g(x) = (x+2)^2 + 1$ y $h(x) = 3x^3 + 7x + 5$, entonces $g'(x) = 2(x+2)$ y $h'(x) = 9x^2 + 7$. La única solución de $g'(x) = 4$ es $x = 0$. Pero $h'(0) = 7 \neq 4 = g'(0)$, luego f no es diferenciable en $x = 0$. Por otra parte

$$h'(x) = 4 \implies x^2 = -\frac{1}{3},$$

por lo que no hay soluciones para $h'(x) = 4$. Por lo tanto, f no tiene rectas tangentes paralelas a $y = 4x$.

80. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y dos veces diferenciable en (a, b) que satisface $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$ para algún $a < c < b$. Demuestre que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f''(\xi) < 0.$$

Solución. Como f es continua en $[a, b]$, alcanza su máximo. Es decir, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. En particular $f(\xi) \geq f(c) > 0 = f(a) = f(b)$, por lo tanto $\xi \neq a, b$. Entonces $\xi \in (a, b)$. Además, como f es diferenciable en este conjunto y alcanza su máximo en $x = \xi$, se tiene que $f'(\xi) = 0$ y $f''(\xi) < 0$.

81. Sea f la función definida por:

$$f(x) = e^{3x-3x^2-\sin(x-x^2)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que su derivada tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$.

Solución. Notemos que f es diferenciable en $(0, 1)$ y que $f(0) = 1 = f(1)$. Por el Teorema de Rolle, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

82. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$x^2 f(x) + \frac{f(x)^3}{3} = 9.$$

Verifique que la función f posee un único máximo.

Solución. Derivando la igualdad tenemos que

$$2xf(x) + x^2 f'(x) + f(x)^2 f'(x) = 0.$$

De donde

$$f'(x) = -\frac{2xf(x)}{x^2 + f(x)^2}.$$

De la ecuación que satisface f se concluye que $f(x) \neq 0$ para todo x , y por lo tanto la derivada se anula solamente cuando $x = 0$. Es decir, el único punto crítico de f es $x = 0$. Ahora, observemos que

$$f''(x) = -\frac{(2f(x) + 2xf'(x))(x^2 + f(x)^2) - 2xf(x)(2x + 2f(x)f'(x))}{(x^2 + f(x)^2)^2}.$$

Como $f(0) = 3$ y $f'(0) = 0$, obtenemos

$$f''(0) = -\frac{2f(0)^3}{f(0)^4} = -\frac{2}{3} < 0,$$

y concluimos que f alcanza un único máximo en $x = 0$.

83. Sea g la función definida por:

$$g(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Determine los puntos donde g es diferenciable y calcule la derivada en esos puntos.

Solución. Notemos que la función g está definida y es continua en el conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Si $x \neq n\pi$ existe una vecindad V de x tal que en esta vecindad

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{o} \quad g(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

dependiendo si $\operatorname{sen} x$ es positivo o negativo. En estos puntos la función es diferenciable, pues es composición de funciones diferenciables en los respectivos dominios. Sin embargo, en los puntos de la forma $x = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, al acercarnos por la izquierda y por la derecha, los valores de las derivadas laterales difieren en el signo. Por lo tanto g no es diferenciable en estos puntos. Para los puntos del dominio donde la función es diferenciable, tenemos

$$g'(x) = \operatorname{sign}(\operatorname{sen} x) \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{|\operatorname{sen} x|x}{(x^2 - 1)^{3/2}}.$$

84. Demuestre que si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ posee una derivada lateral por la derecha $g'_+(x_0) = A$ en $x_0 \in [0, 1)$ entonces para cada par de sucesiones (a_n) , (b_n) tales que ambas convergen a x_0 con $x_0 \leq a_n < b_n$ y tales que existe $\beta > 0$ de modo que

$$b_n - a_n \geq \beta(b_n - x_0),$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} = A.$$

Solución. Como $g'_+(x_0) = A$, tenemos que para $x \geq x_0$,

$$g(x) = g(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

con $\alpha(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow x_0^+$. Evaluando esta igualdad cuando $x = a_n$ y $x = b_n$ tenemos que

$$g(a_n) = g(x_0) + A(a_n - x_0) + \alpha(a_n)(a_n - x_0), \quad g(b_n) = g(x_0) + A(b_n - x_0) + \alpha(b_n)(b_n - x_0).$$

Por lo tanto, restando estas igualdades,

$$\frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} = A + \frac{1}{b_n - a_n} (\alpha(b_n)(b_n - x_0) - \alpha(a_n)(a_n - x_0)).$$

Notemos que

$$\frac{b_n - x_0}{b_n - a_n} \leq \frac{1}{\beta} \quad y \quad \frac{a_n - x_0}{b_n - a_n} \leq \frac{1}{\beta}.$$

Así, tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene el resultado.

85. Formule y pruebe un criterio que involucre derivadas de orden superior para determinar si un punto es de inflexión. Este criterio debe permitirle determinar que $x = 0$ es un punto de inflexión de $f(x) = x^{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Primero formulamos el criterio. Sea $f : (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $b \in (a, c)$. Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f''(b) = \dots = f^{(m-1)}(b) = 0$, y además $f^{(m)}(b)$ existe y es distinto de cero. Si m es impar entonces b es un punto de inflexión, y si m es par entonces no lo es.

Ahora probamos el criterio. Aplicando el Teorema de Taylor a f'' alrededor de b , se obtiene que

$$f''(x) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-2)!} (x-b)^{m-2},$$

para ξ entre x y b . Como $f^{(m)}$ es continua y $f^{(m)}(b) \neq 0$, existe un intervalo conteniendo b en el cual $f^{(m)}(\xi)$ tiene el mismo signo que $f^{(m)}(b)$. Por lo tanto, el signo de $f''(x)$ coincide con el signo de $f^{(m)}(b)(x-b)^{m-2}$. Si m es impar, entonces $m-2$ es impar, y en consecuencia $(x-b)^{m-2}$ cambia de signo al pasar por b . Por tanto $f''(x)$ cambia de signo en b , y se concluye que b es un punto de inflexión. Por otra parte, si m es par, entonces $m-2$ es par, y por ello $(x-b)^{m-2}$ no cambia de signo al pasar por b . Por tanto $f''(x)$ no cambia de signo en b , y se concluye que b no es un punto de inflexión.

Ahora verificamos el criterio para la función $f(x) = x^{2n+1}$. Entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k = 2, 3, \dots, 2n$, mientras que $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \neq 0$. Así, el primer orden $m \geq 2$ para el cual $f^{(m)}(0) \neq 0$ es $m = 2n+1$, que es impar. Por el criterio anterior, $x = 0$ es un punto de inflexión de $f(x) = x^{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

86. Demuestre el Teorema del Valor Medio Generalizado. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tales que g es estrictamente creciente. Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Solución. Primero observemos que como g es estrictamente creciente, los cuocientes de la conclusión están bien definidos. Sea $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t)$. Como h es composición de funciones diferenciables en (a, b) , es también diferenciable en (a, b) . Además $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. Por el Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

87. De un ejemplo de una función f y un intervalo $[a, b]$, de modo que f sea continua en $[a, b]$, diferenciable en todo el intervalo (a, b) con la excepción de un punto y tal que no existe $c \in (a, b)$ de modo que

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c).$$

Solución. Consideremos la función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Esta función es continua en $[-1, 1]$ y diferenciable en todo $(-1, 1)$ excepto en $x = 0$. Los valores de su derivada son $f'(x) = -1$, si $x \in (-1, 0)$ y $f'(x) = 1$ si $x \in (0, 1)$. Notemos que

$$\frac{f(-1) - f(1)}{-1 - 1} = 0 \neq f'(c) \quad \forall c \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

88. Demuestre la que derivada del área de un círculo con respecto al radio es igual al perímetro del círculo.

Solución. Definimos la función área de un círculo por $A(r) = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo. Entonces, $A'(r) = 2\pi r$, que es el perímetro del círculo.

89. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa.

- a) Demuestre que para todo $x \in (a, b)$ las derivadas laterales existen.
- b) Demuestre que las funciones $x \mapsto f'_+(x)$ y $x \mapsto f'_-(x)$ son crecientes.
- c) Sean $a \leq x < y \leq b$, demuestre que

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y).$$

d) Demuestre que para todo $x \in (a, b)$ se tiene que $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

Solución. Para la parte a), fijemos $x \in (a, b)$ y consideremos

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad t > x.$$

Entonces, si $x < t_1 < t_2$, tenemos que

$$\frac{f(t_1) - f(x)}{t_1 - x} \leq \frac{f(t_2) - f(x)}{t_2 - x},$$

por lo tanto $\varphi(t)$ es creciente cuando t decrece a x . Además, para $t \in (x, b)$,

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x},$$

así que $\varphi(t)$ es acotada superiormente para $t > x$. Por lo tanto, el límite

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

existe. El caso de la derivada lateral izquierda es análogo.

Para la parte b), sean $a < x_1 < x_2 < b$. Por la convexidad, para cualquier $x_1 < t < x_2$,

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Haciendo $t \rightarrow x_1^+$:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ahora para $t > x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$$

Haciendo $t \rightarrow x_2^+$:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_+(x_2).$$

El caso f'_- creciente es análogo.

Para la parte c), la primera desigualdad fue probada en la parte anterior. Para la segunda desigualdad, tomemos $x < t < y$. Entonces,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

Haciendo $t \rightarrow y^-$ se tiene el resultado.

Para la parte d) sean $x_1 < x < x_2$. Como

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

haciendo $x_1 \rightarrow x^-$ y $x_2 \rightarrow x^+$ se obtiene $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

90. Demuestre que toda función convexa no es diferenciable en a lo más un conjunto numerable de puntos.

Solución. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Sea además

$$E := \{x \in I : f \text{ no es diferenciable en } x\}.$$

Demostraremos que E es a lo más numerable. Por el ejercicio anterior, para cada $x \in I$, las derivadas laterales $f'_-(x)$ y $f'_+(x)$ existen y satisfacen $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ para todo $x \in I$. Además f es diferenciable en x si y solo si $f'_-(x) = f'_+(x)$. Por lo tanto, si $x \in E$, entonces $f'_-(x) < f'_+(x)$. Recordamos por el ejercicio anterior que como f es convexa, f'_- y f'_+ son crecientes, y además $f'_+(x) \leq f'_-(y)$ si $x < y$. De aquí se sigue que si $x < y$ pertenecen a E entonces los siguientes intervalos son disjuntos,

$$I_x := (f'_-(x), f'_+(x)), \quad I_y := (f'_-(y), f'_+(y))$$

Así, obtenemos una familia $\{I_x : x \in E\}$ de intervalos abiertos no vacíos dos a dos disjuntos. Como todo intervalo abierto no vacío contiene un número racional, para cada $x \in E$ podemos elegir $q_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$. Como los intervalos son disjuntos, necesariamente si $x \neq y$ entonces $q_x \neq q_y$. Luego, la función de E en $\mathbb{Q}$ dada por $x \mapsto q_x$ es inyectiva. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, se concluye que E es a lo más numerable.

91. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y convexa tal que $\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \infty$. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sup\{f'(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Solución. Como f es convexa, sabemos que f' es creciente y luego $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \sup\{f'(x) : x \in \mathbb{R}\}$ existe. Y por lo visto en el ejercicio anterior $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ es una función creciente. Por lo tanto el siguiente límite existe,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Para finalizar, por el Teorema del Valor Medio, tenemos que

$$\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2x) - f(x)}{2x} - \frac{f(x)}{2x} = \frac{f'(c_x)}{2} - \frac{f(x)}{x}.$$

Para finalizar restamos $\frac{f(x)}{x}$ y tomamos el límite cuando x tiende a infinito para concluir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \sup\{f'(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Referencias

1. Anderson, A. G. *The Derivative of $\cos x$* . The American Mathematical Monthly, Vol. 60, No. 4 (1953), pp. 255–256.
2. Bers, Lipman. *On Avoiding the Mean Value Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 5 (1967), p. 583.
3. Bressoud, David M. *A radical approach to real analysis*. Second edition. Classroom Resource Materials Series. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007. xvi+323 pp.
4. Bush, K. A. *On an Application of the Mean Value Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 62, No. 8 (1955), pp. 577–578.
5. Cohen, Leon W. *On Being Mean to the Mean Value Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 5 (1967), pp. 581–582.
6. Cohen, Leon W. *The Derivative Reconsidered*. The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 9 (1976), pp. 727–728.
7. Courant, Richard and John, Fritz. *Introduction to calculus and analysis. Vol. I*. Reprint of the 1989 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999. xxiv+661 pp.
8. Creighton, J. H. T. *A Strong Second Derivative Test*. The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 3 (1975), pp. 287–289.
9. Evans, Jacqueline. *Sequences Generated by Use of the Mean Value Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 4 (1961), p. 365.
10. Gelbaum, Bernard R. and Olmsted, John M. H. *Counterexamples in analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. xxiv+195 pp.
11. Hardy, G. H. *A course of pure mathematics*. 10th ed. Cambridge University Press, New York, 1958. xii+509 pp.
12. Levi, Howard. *Anti-Differentiation and a Converse to the Mean Value Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 5 (1967), pp. 585–586.
13. Ivanoff, V. F. *The n th Derivative of a Fractional Function*. The American Mathematical Monthly, Vol. 55, No. 8 (1948), p. 491.
14. Lima, Elon Lages. *Curso de análise*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976. ix+344 pp.
15. Longley, W. R. *An Example of a Continuous Function with Finite Discontinuity in Its Second Derivative*. The American Mathematical Monthly, Vol. 44, No. 7 (1937), pp. 467–470.
16. Mazkewitsch, D. *The n -th Derivative of a Product*. The American Mathematical Monthly, Vol. 70, No. 7 (1963), pp. 739–742.
17. Olsen, Lars. *A New Proof of Darboux's Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 8 (2004), pp. 713–715.
18. Poliferno, M. J. *A Natural Auxiliary Function for the Mean Value*. The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 1 (1962), pp. 45–47.
19. Rudin, Walter. *Principles of mathematical analysis*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976. x+342 pp.
20. Rudin, Walter. *Restrictions on the Values of Derivatives*. The American Mathematical Monthly, Vol. 84, No. 9 (1977), pp. 722–723.
21. Shakarchi, Rami. *Problems and solutions for Undergraduate analysis*. Springer-Verlag, New York, 1998. xii+368 pp.
22. Sternberg, Shlomo. *Dynamical systems*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2010. iv+265 pp.
23. UCV. *Cálculo Diferencial*. Tercera Edición. Universidad Católica de Valparaíso, 1982.
24. Wen, Liu. *A Nowhere Differentiable Continuous Function*. The American Mathematical Monthly, Vol. 107, No. 5 (2000), pp. 450–453.
25. Zeitlin, David. *An Application of the Mean Value Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 6 (1957), p. 427.
26. Zegarra, L. *Ejercicios de Cálculo I*. 1978.

Capítulo 4

La Integral de Riemann

1. Determine la integral superior y la integral inferior de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

Solución. Sea $\mathcal{P} := \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = 1\}$ una partición de $[0, 1]$. Como el conjunto de los números irracionales es denso en $[0, 1]$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que $m_i = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 0$. Por lo tanto $s(f, \mathcal{P}) = 0$. Luego $\int_0^1 x \, dx = 0$.

Por otra parte, los números racionales también son densos en $[0, 1]$, en particular $M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = t_i$. Probaremos en primer lugar que

$$\int_0^1 x \, dx \geq \frac{1}{2}.$$

Es decir, $1/2$ es cota inferior del conjunto $\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } [0, 1]\}$. Sea $\mathcal{P} = \{0 = t_0, \dots, t_{n-1}, t_n = 1\}$ una partición de $[0, 1]$. Es posible acotar inferiormente cada sumando en $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n t_i(t_i - t_{i-1})$.

En efecto,

$$t_i(t_i - t_{i-1}) = t_i^2 - t_i t_{i-1} > t_i^2 - t_i t_{i-1} - \frac{(t_i - t_{i-1})^2}{2} = \frac{t_i^2}{2} - \frac{t_{i-1}^2}{2}.$$

Así, para toda partición $\mathcal{P}$ tenemos que

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n t_i(t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i^2}{2} - \frac{t_{i-1}^2}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $\int_0^1 x \, dx \geq 1/2$. Ahora probaremos ahora que $\inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } [0, 1]\} = 1/2$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la partición en intervalos de igual largo definida por $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Notamos que $M_i = i/n$, y luego

$$S(f, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Notamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{2}$, y por lo tanto $\inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } [0, 1]\} = 1/2$. Es decir $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

2. Demuestre que, si $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables entonces

$$\int_0^2 (x-1)f((x-1)^2)dx = 0 = \int_0^\pi g(\sin x) \cos x \, dx.$$

Solución. Para la primera integral, hacemos el cambio de variable $y = x - 1$, y descomponemos la integral en dos términos,

$$\int_0^2 (x-1)f((x-1)^2)dx = \int_{-1}^1 yf(y^2)dy = \int_0^1 yf(y^2)dy + \int_{-1}^0 yf(y^2)dy$$

Luego, hacemos el cambio de variable $y = -z$ en la segunda integral arriba,

$$\int_{-1}^0 yf(y^2)dy = \int_1^0 zf(z^2)dz = -\int_0^1 zf(z^2)dz.$$

De aquí se obtiene que la integral original vale cero.

Procedemos de la misma forma para la segunda integral. Primero hacemos el cambio de variable $y = x - \frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^\pi g(\sin x) \cos x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g\left(\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) dy = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\cos y) \sin(y) dy.$$

Ahora descomponemos la integral arriba en dos términos y usamos el cambio de variable $y = -z$,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\cos y) \sin(y) dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos y) \sin y dy + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(\cos y) \sin y dy, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos y) \sin y dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 g(\cos(-z)) \sin(-z) dz, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos y) \sin y dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos z) \sin z dz = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

De aquí se concluye que la segunda integral también es cero.

3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y acotada. Sea

$$\mathcal{E}_f = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ función escalonada tal que } g(x) \leq f(x) \text{ para } x \in [a, b]\}.$$

Demuestre que

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b g(x) dx : g \in \mathcal{E}_f \right\}.$$

Solución. Sea $g \in \mathcal{E}_f$ y $\mathcal{P}$ la partición de $[a, b]$ inducida por g , es decir la partición que contiene los puntos de discontinuidad de g . Como g es escalonada y menor o igual a f tenemos que

$$\int_a^b g(x) dx = s(g, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}).$$

Por otra parte, dada una partición arbitraria $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ de $[a, b]$ y $m_i := \inf\{f(x) : x \in (t_{i-1}, t_i)\}$ definimos la función escalonada g tal que $g(x) = m_i$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i)$. Claramente $g \in \mathcal{E}_f$ y $s(g, \mathcal{P}) = s(f, \mathcal{P})$. De aquí concluimos que

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b g(x) dx : g \in \mathcal{E}_f \right\}.$$

4. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y acotada. Demuestre que las integrales superiores e inferiores no cambian si la función f se reemplaza por una nueva función que difiere de f en un solo punto.

Solución. Sea $c \in (a, b)$ y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c\}$ y $f(c) \neq g(c)$. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ que no contiene al punto $\{c\}$. Recordemos que tanto la integral superior como la inferior pueden calcularse con particiones que no poseen un punto escogido. Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P} \cup \{c - \varepsilon, c + \varepsilon\}$. Notemos que $s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(g, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq 2\varepsilon|f(c) - g(c)|$. Como el valor de ε es arbitrario concluimos que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Un argumento análogo permite probar que las integrales superiores coinciden.

5. Construya ejemplos de funciones no integrables que poseen primitivas.

Solución. La función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 1$ y $f(x) = 1/x^2$ cuando $x \neq 0$, posee primitiva $-1/x$, sin embargo no es integrable. En efecto, las integrales superiores e inferiores dan el valor $+\infty$.

6. Utilizando el Teorema de los Intervalos Encajados demuestre que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable entonces existe $c \in [a, b]$ donde la función es continua (ver el trabajo de Hirst [8]).

Solución. Consideramos las particiones P_n que dividen el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales. Como f es integrable tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe m tal que para $n \geq m$,

$$\sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = (b - a)/2$, existe $m \geq 4$ que satisface la propiedad anterior. En este caso,

$$\sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m (M_i - m_i) \frac{b-a}{m} < \frac{b-a}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^m (M_i - m_i) < \frac{m}{2}.$$

Como $m \geq 4$, se satisface que $m/2 \leq m - 2$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^m (M_i - m_i) < m - 2.$$

Así, por el Principio del Palomar existen al menos tres valores de la sumatoria para los cuales $M_i - m_i \leq 1$. Luego, uno de los tres intervalos no intersecta los extremos de $[a, b]$. Es decir, obtenemos un intervalo $[a_1, b_1]$ contenido en $[a, b]$ con $a_1 \neq a$ y $b_1 \neq b$. Este es el primer intervalo a usar en el Teorema de Intervalos Encajados.

Para construir el k -ésimo intervalo consideramos $\varepsilon = (b - a)/2k$ en vez de $(b - a)/2$ en el intervalo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ ya construido. Así, escogiendo siempre particiones que dejen al intervalo dividido en partes iguales, existe m de modo que

$$\sum_{i=1}^m (M_i - m_i) < \frac{m}{2k} < \frac{m-2}{k}.$$

Así, nuevamente por el Principio del Palomar debe haber al menos tres intervalos contenidos en este con $M_i - m_i < 1/k$. Y por lo tanto un intervalo tal que sus extremos a_k y b_k satisfacen $a_k \neq a$ y $b_k \neq b$.

De esta forma obtenemos una sucesión de intervalos tal que $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, con $a_n \neq a_{n-1}$ y $b_n \neq b_{n-1}$. Además el largo de los intervalos construidos tiende a cero. Por lo tanto, por el Teorema de los Intervalos Encajonados existe un punto x_0 que pertenece a todos los intervalos. Como $\sup_{x \in [a_n, b_n]} f - \inf_{x \in [a_n, b_n]} f < 1/n$, se obtiene la continuidad en x_0 . Un corolario de este resultado, es

que los puntos de continuidad de una función integrable son densos en su dominio.

7. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $\int_a^b f(x)dx = 0$.

b) Si f es continua en $c \in (a, b)$, entonces $f(c) = 0$.

Solución. Primero probaremos que a) implica b). Suponemos por contradicción que existe $c \in (a, b)$ donde f es continua y $f(c) > 0$. Luego existe un intervalo I para el cual $f(x) > \frac{1}{2}f(c)$ para todo $x \in I$. Por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_I f(x)dx \geq |I| \frac{f(c)}{2} > 0,$$

donde $|I|$ es el largo del intervalo I . Esto prueba la implicancia por contradicción. Ahora probaremos que b) implica a). Por el Ejercicio 6 los puntos donde la función es continua son densos en $[a, b]$. Además en estos puntos la función es igual a cero por hipótesis. Luego la integral inferior (y superior) es cero. Recordamos que la función es integrable por hipótesis, y así la integral de la función es cero.

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f'(x) = (f(x))^2$. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = 0$.

Solución. De las hipótesis sabemos que $f'(x) = (f(x))^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego f es creciente. Supongamos que existe c tal que $f(c) > 0$. Dado que $f'(c) = (f(c))^2 > 0$, tenemos que $f(x) > 0$ para todo $x > c$. Notemos que, si $x > c$ entonces

$$x - c = \int_c^x 1 dt = \int_c^x \frac{f'(t)}{f^2(t)} dt = \frac{1}{f(c)} - \frac{1}{f(x)}.$$

Luego

$$f(x) = \frac{f(c)}{1 - f(c)x + cf(c)}. \quad (4.2)$$

En este caso la función tiende a infinito cuando el denominador $1 - f(c)x + cf(c)$ tiende a cero. Por lo tanto la función no es diferenciable en el punto x_0 tal que $1 - f(c)x_0 + cf(c) = 0$. Esto nos da una contradicción. Un argumento análogo permite probar el caso en que $f(c) < 0$.

9. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Demuestre que las siguientes funciones también son integrables

$$M(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad m(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Solución. Como

$$M(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \quad m(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Por el Teorema 4.5 el valor absoluto de una función integrable es integrable, la suma de funciones integrables es integrable y además al multiplicar por una constante, las funciones integrables siguen siéndolo. Por lo tanto ambas funciones son integrables.

10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Denotemos por $\omega(x)$ la oscilación de f en $x \in [a, b]$. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \omega(x)dx.$$

Solución. Sea $\mathcal{P} = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Primero observamos que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \omega_k(x_k - x_{k-1}) = S(\omega, \mathcal{P}).$$

Como $\inf(F - G) \geq \inf F + \inf(-G)$ y $-\sup G = \inf(-G)$, tomando el ínfimo sobre las particiones tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}) - \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}} S(\omega, \mathcal{P}) = \int_a^b \omega(x)dx.$$

Ahora probaremos que $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$ no sólo es cota inferior sino que corresponde al ínfimo de acuerdo a la integral superior de ω . Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ particiones de $[a, b]$ tales que

$$S(f, \mathcal{L}) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_a^b f(x)dx - s(f, \mathcal{R}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Considerando la partición $\mathcal{M} = \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ tenemos que

$$\left| \left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right) - (S(f, \mathcal{M}) - s(f, \mathcal{M})) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular

$$S(\omega, \mathcal{M}) = S(f, \mathcal{M}) - s(f, \mathcal{M}) < \left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right) + \varepsilon.$$

Por lo tanto se obtiene el resultado.

11. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada integrable. Denote por $m = (a + b)/2$. Demuestre que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b (f(x) + (x-m)f'(x)) dx.$$

Solución. Usando integración por partes tenemos que

$$\int_a^b x f'(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx.$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + (x-m)f'(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx - \int_a^b m f'(x) dx \\ &= b f(b) - a f(a) - m(f(b) - f(a)) \\ &= f(b) \left(\frac{b-a}{2} \right) + f(a) \left(\frac{b-a}{2} \right), \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la identidad pedida directamente.

12. Construya un ejemplo de una función integrable que sea discontinua en un conjunto infinito.

Solución. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/n \text{ con } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Esta función es discontinua en todo punto de la forma $1/n$ y continua en $[0, 1] \setminus \{1/n\}_n$. Además es una función acotada. Probaremos que es integrable y que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Por la densidad del conjunto $[0, 1] \setminus \{1/n\}_n$ en el intervalo $[0, 1]$, la integral inferior es cero. Ahora para la integral superior basta considerar la partición

$$\mathcal{P} = \{1/n, 1/n + 1/n^2, 2/n - 1/n^2, 2/n + 1/n^2, \dots, (n-1)/n - 1/n^2, (n-1)/n + 1/n^2, 1\}.$$

Para esta partición la suma superior es $S(f, \mathcal{P}) = 1/n + \frac{2n}{n^2} = \frac{3}{n}$. Por lo tanto la integral superior también es igual a cero. Por lo tanto la función es integrable con integral cero.

13. Basándose en la Fórmula de Wallis, demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Solución. Primero recordemos la Fórmula de Wallis,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Reescribiendo la Fórmula de Wallis usando factoriales y potencias de dos obtenemos lo siguiente,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)2^{2n}(n!)}{(2n!)^2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n!)^2(2n+1)}.$$

14. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}} = \frac{2}{q-p} \cdot \sqrt{\frac{x-q}{x-p}}.$$

Solución. Sea $g(x) = \frac{2}{q-p} \sqrt{\frac{x-q}{x-p}}$. Calculamos

$$g'(x) = \frac{2}{q-p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x-p}{x-q}} \cdot \frac{(x-p) - (x-q)}{(x-p)^2} = \frac{1}{\sqrt{(x-q)(x-p)(x-p)}}.$$

El resultado es consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo.

15. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/n, \quad n \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Pruebe que la función f es integrable y calcule su integral.

Solución. La función f es igual a cero en el conjunto de números irracionales en $[0, 1]$. Este conjunto es denso en $[0, 1]$, luego toda suma inferior es igual a cero. Por lo tanto la integral inferior es igual a cero. Ahora probaremos que la integral superior también es igual a cero. Sea $N \in \mathbb{N}$ con $N > 100$. Definimos la partición $\mathcal{P}_N$ de $[0, 1]$ por

$$\mathcal{P}_N = \left\{ 0, \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^3}, \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^3}, \frac{1}{N-1} - \frac{1}{2N^3}, \frac{1}{N-1} + \frac{1}{2N^3}, \dots, \frac{1}{2} - \frac{1}{2N^3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2N^3}, 1 - \frac{1}{2N^3}, 1 \right\}.$$

La suma superior de f con respecto a $\mathcal{P}_N$ viene dada por

$$S(f, \mathcal{P}_N) = \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^3} + \frac{N-1}{N^3} + \frac{1}{2N^3} = \frac{N^2 + N - 1}{N^3}.$$

Así $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_N) = 0$. Como la integral inferior es menor que la superior concluimos que la integral superior es igual a cero. Por lo tanto la función es integrable con integral igual a cero.

16. Sea $A := (a_n)_n$ una sucesión definida en $[0, 1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{a_n \in A: a_n \leq x} a_n.$$

Demuestre que f es integrable.

Solución. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ la función f es acotada. Además los términos de la sucesión son no negativos, y así la función f es monótona y acotada. Por lo tanto la función es integrable de acuerdo al Teorema 4.6.

17. Utilizando la definición de integral dada por Riemann calcule los siguientes límites

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{1/n} + e^{2/n} + e^{3/n} + \dots + e^{n/n} \right).$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k), \quad k > 0.$$

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right).$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n^3 + 1^3} + \frac{1}{n^3 + 2^3} + \dots + \frac{1}{n^3 + n^3} \right).$$

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}.$$

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Solución.

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{1/n} + e^{2/n} + e^{3/n} + \dots + e^{n/n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \cdots + n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^k}{n^k} + \frac{2^k}{n^k} + \cdots + \frac{n^k}{n^k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \right)^k = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}.$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+k/n} = \int_0^2 \frac{dx}{1+x}. \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable $y = 1+x$ obtenemos $\int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \int_1^3 \frac{dy}{y} = \log 3$.

e)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n^3+1^3} + \cdots + \frac{1}{n^3+n^3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^3}{n^3+1^3} + \cdots + \frac{n^3}{n^3+n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^3}{n^3+k^3}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^3} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}. \end{aligned}$$

Utilizando fracciones parciales tenemos que

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

Integrando término a término y utilizando los cambios de variable correspondientes, el resultado es

$$\frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}/2} \arctan \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C.$$

Al evaluar en los extremos correspondientes tenemos que el resultado es $\frac{\log 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

f)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}, \\ &= \exp \left(\log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)} \right) \right), \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((1+1/n) \cdots (1+n/n))}{n} \right), \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(1+k/n) \right) = \exp \left(\int_0^1 \log(1+x) dx \right). \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable $1+x=y$ obtenemos,

$$\exp \left(\int_0^1 \log(1+x) dx \right) = \exp \left(\int_1^2 \log(y) dy \right) = \exp(2 \log 2 - 1) = \frac{4}{e}.$$

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k/n}}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

18. Determine las siguientes primitivas:

a)

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} dx, \quad \int x^{1/3} \sqrt{x^{4/3} - 1} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$$

b)

$$\int e^{3x} dx, \quad \int x e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx.$$

c)

$$\int \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \cos x} dx, \quad \int \operatorname{tg}(3x) dx, \quad \int \operatorname{sen}^2(3x) \cos(3x) dx.$$

d)

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx, \quad \int \frac{dx}{x \log 3x}, \quad \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

e)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int \operatorname{sen}^6(x) dx, \quad \int \operatorname{sen}^4(ax) dx.$$

f)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}, \quad \int \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} dx, \quad \int \frac{x}{4 + x^2} dx.$$

g)

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x^2}}, \quad \int \frac{x + 1}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$$

h)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}, \quad \int \frac{(2x + 3)}{4x^2 + 4x + 5} dx, \quad \int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

i)

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x - 3} dx, \quad \int \frac{dx}{x(x+1)^2}, \quad \int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx.$$

j)

$$\int x \log x dx, \quad \int \operatorname{sen}(\log x) dx, \quad \int \log(a^2 + x^2) dx.$$

k)

$$\int x(\cos(2x + 1)) dx, \quad \int x \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x) dx, \quad \int x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x) dx.$$

l)

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}, \quad \int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx, \quad \int \cos(3x) \operatorname{sen}(2x) dx.$$

m)

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{dx}{x(1 - \sqrt[4]{x})}, \quad \int \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x} dx.$$

Solución.

- a) Considerando los cambios de variable $u = 2 + \cos x$, $u = x^{4/3} - 1$ y $u = 1 - 4x^2$ respectivamente, se tiene que,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{-du}{u} = -\log |u| + C = -\log |2 + \cos x| + C, \\ \int x^{1/3} \sqrt{x^{4/3} - 1} dx &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{3}{4} du = \frac{3}{4} \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} + C = \frac{1}{2} (x^{4/3} - 1)^{3/2} + C, \\ \int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx &= \int \frac{-du}{8\sqrt{u}} = \frac{-\sqrt{u^{1/2}}}{4} + C = \frac{-\sqrt{(1 - 4x^2)^{1/2}}}{4} + C.\end{aligned}$$

- b) Considerando los cambios de variable $u = 3x$, $u = -x^2$ y $u = \sqrt{x+1}$ respectivamente, se tiene que,

$$\begin{aligned}\int e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{e^u}{3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C, \\ \int x e^{-x^2} dx &= \frac{-1}{2} \int e^u du = \frac{-1}{2} e^u + C = \frac{-1}{2} e^{-x^2} + C, \\ \int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx &= 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x+1}} + C.\end{aligned}$$

- c) Considerando los cambios de variable $u = 1 + \cos x$, $u = \cos 3x$ y $u = (\operatorname{sen}(3x))^2$ respectivamente, se tiene que,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \cos x} dx &= - \int \sqrt{u} du = \frac{-3u^{3/2}}{2} + C = \frac{-3(1 + \cos x)^{3/2}}{2} + C \\ \int \operatorname{tg}(3x) dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)} dx = \frac{-1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{-\log |u|}{3} + C = \frac{-\log |\cos 3x|}{3} + C \\ \int \operatorname{sen}^2(3x) \cos(3x) dx &= \int \frac{u}{6\sqrt{u}} du = \frac{1}{6} \int \sqrt{u} du = \frac{u^{3/2}}{9} + C = \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{9} + C\end{aligned}$$

- d) En la primera integral notamos que

$$\int \frac{(\cos x)^3}{(\operatorname{sen} x)^2} dx = \int \frac{(1 - (\operatorname{sen} x)^2) \cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} dx = \int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} dx - \int \cos x dx.$$

Así, utilizando el cambio de variable $u = (\operatorname{sen} x)^2$ se obtiene

$$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{3/2}} = -u^{-1/2} + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + C.$$

Luego

$$\int \frac{(\cos x)^3}{(\operatorname{sen} x)^2} dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x + C.$$

Para las siguientes dos integrales utilizamos los cambios de variable $u = 1 + e^x$ y $u = \log 3x$ respectivamente,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx &= \int \frac{du}{u} = \log |u| + C = \log |1 + e^x| + C, \\ \int \frac{1}{x \log 3x} dx &= \int \frac{du}{u} = \log |u| + C = \log (|\log 3x|) + C.\end{aligned}$$

- e) Recordemos que la derivada de $\tan x$ es $\sec^2 x$, así

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

Utilizando la fórmula del coseno del ángulo doble obtenemos,

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x dx &= \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\int dx - 3 \int \cos 2x + 3 \int \cos^2 2x dx - \int \cos^3 2x dx \right). \end{aligned}$$

Debemos integrar $\cos^2 x$ y $\cos^3 x$. Ocupando la fórmula del coseno del ángulo doble,

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Notemos que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ e integramos $\cos x \sin^2 x$ utilizando el cambio de variable $u = \sin x$,

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos x dx - \int \cos x \sin^2 x dx \\ &= \int \cos x dx - \int u^2 du = \sin x - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Luego la respuesta es

$$\frac{5x}{16} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3 \sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$$

Para la tercera integral utilizamos la fórmula del seno del ángulo doble y la integral de $\cos^2 x$,

$$\begin{aligned} \int \sin^4 ax dx &= \int (\sin^2 ax)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2ax)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2ax) dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2ax) dx \\ &= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32} + C. \end{aligned}$$

f) Realizando los cambios de variable $y = 2x$, $y = 4 + x^2$ y $y = 4 + x^2$, respectivamente,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\arcsin y}{2} + C = \frac{\arcsin(2x)}{2} + C, \\ \int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int y^{-1/2} dy = \sqrt{y} + C = \sqrt{4+x^2}, \\ \int \frac{x}{4+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \log y + C = \log(4+x^2) + C. \end{aligned}$$

g) Para la primera integral realizamos los cambios de variable $ay = x$ y $\sec t = y$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{a} \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t \tan t} dt = \frac{1}{a} t + C = \frac{1}{a} \arcsin y + C = \frac{\arcsin x/a}{a} + C.$$

En esta nueva integral realizamos el cambio de variable $\sqrt{2}y = \sqrt{5}x$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}} = \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \frac{dy}{\sqrt{2-2y^2}} = \frac{\arcsin y}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}} + C$$

Ahora dividimos la integral en dos y realizamos los cambios de variable $2y = x$ y $y = 4 - x^2$, respectivamente,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= 2 \int \frac{dy}{\sqrt{4-4y^2}} = \arcsin y + C = \arcsin \frac{x}{2} + C, \\ \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int y^{-1/2} dy = -y^{1/2} + C = -\sqrt{4-x^2} + C.\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C.$$

h) Como $\int \frac{dw}{\sqrt{w^2+a^2}} = \log|w + \sqrt{w^2+a^2}| + C$, entonces,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2^2}} = \log|w + \sqrt{w^2+a^2}| + C = \log|x-1 + \sqrt{x^2-2x+5}| + C.$$

Primero dividimos nuestro problema en dos integrales,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{8x+12}{4x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(8x+4)+8}{4x^2+4x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5} dx + 2 \int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5} dx &= \frac{\log|4x^2+4x+5|}{4} + C, \\ 2 \int \frac{dx}{4(x^2+x+5/4)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+1} = \frac{1}{2} \arctan(x+1/2) + C.\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5} dx = \frac{\log u}{4} + \frac{1}{2} \arctan(x+1/2) + C.$$

Tal como en el ejercicio anterior separamos en dos integrales y luego concluimos de la misma forma,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+4x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)-4}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{\log|x^2+4x+5|}{2} - 2 \arctan(x+2) + C.\end{aligned}$$

i) Para los próximos dos ejercicios, utilizamos fracciones parciales,

$$\int \frac{x}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{x}{(x-3)(x+1)} dx = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{3 \log|x-3|}{4} + \frac{\log|x+1|}{4} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

En este tercero hacemos el cambio de variable $e^x = u$ y luego utilizamos fracciones parciales,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2} dx &= \int \frac{e^x}{(e^x+2)(e^x+1)} dx = \int \frac{du}{(u+1)u} \\ &= \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = \log|u| + \log|u+1| + C = \log|e^x+1| - \log|e^x+2| + C\end{aligned}$$

j) Por integración por partes,

$$\int x \log x dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Realizando dos veces integración por partes y despejando la integral pedida,

$$\int \log x dx = x \log x - \int \cos \log x dx = x \log x - (x \cos \log x + \int \log x dx).$$

Por lo tanto obtenemos

$$\int \log x dx = \frac{x}{2} (\log x - \cos \log x) + C.$$

Integrando por partes,

$$\int \log(x^2 + a^2) dx = x \log(a^2 + x^2) - \int \frac{2x^2}{a^2 + x^2} dx = x \log(a^2 + x^2) - \int 2 - \frac{2a^2}{a^2 + x^2} dx.$$

Luego

$$\int \log(x^2 + a^2) dx = x \log(a^2 + x^2) - 2x + 2a \arctan x/a + C.$$

k) Realizando el cambio de variable $2x + 1 = y$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \int x \cos(2x + 1) dx &= \frac{1}{4} \int (y - 1) \cos y dy = \frac{1}{4} \int y \cos y dy + \frac{1}{4} \int -\cos y dy \\ &= \frac{1}{4} \left(y \sin y - \int \sin y dy \right) - \frac{\sin y}{4}. \end{aligned}$$

Luego

$$\int x \cos(2x + 1) dx = \frac{(2x + 1) \sin(2x + 1)}{4} + \frac{\cos(2x + 1)}{4} - \frac{\sin(2x + 1)}{4} + C.$$

Integrando por partes y utilizando el cambio de variable $x = \sin u$,

$$\int x \arcsin x dx = \frac{x^2 \arcsin x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{x^2 \arcsin x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin^2 u du.$$

Ocupando la fórmula del coseno del ángulo medio,

$$\frac{x^2 \arcsin x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 2u}{2} du = \frac{x^2 \arcsin x}{2} - \frac{1}{4} \int du + \int \frac{1}{4} \cos 2u du = \frac{x^2 \arcsin x}{2} - \frac{u}{4} + \frac{\sin 2u}{8} + C.$$

Por último ocupando la fórmula del seno del ángulo doble y reemplazando en función de x , obtenemos

$$\frac{x^2 \arcsin x}{2} - \frac{u}{4} + \frac{2 \sin u \cos u}{8} + C = \frac{x^2 \arcsin x}{2} - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{4} + C.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int x^2 \arctan x dx &= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1 + x^2} = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{3} \int x dx - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \log |x^2 + 1| + C. \end{aligned}$$

l) Realizando los cambios de variable $z = \tan x/2$ y $z - 1 = x$,

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{(2dz)/(1+z^2)}{1 - (2z)/(1+z^2)} = 2 \int \frac{dz}{(z-1)^2} = 2 \int x^{-2} dx = \frac{-2}{x} + C = \frac{-2}{z-1} + C = \frac{-2}{\tan x/2 - 1} + C.$$

Notemos que,

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx = \int \frac{\cos x - 2}{2 - \cos x} + \frac{2}{2 - \cos x} dx = 2 \int \frac{dx}{2 - \cos x} - \int dx = 2 \int \frac{dx}{2 - \cos x} - x.$$

Para calcular la nueva integral realizamos el cambio de variable $z = \tan x/2$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \cos x} &= \int \frac{2dz/(1+z^2)}{2 - (1-z^2)/(1+z^2)} = \int \frac{2}{3z^2+1} dz = \frac{2}{3} \int \frac{dz}{z^2 + (1/\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan(\sqrt{3}z) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan(\sqrt{3} \tan \frac{x}{2}) + C. \end{aligned}$$

Luego

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx = \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan(\sqrt{3} \tan \frac{x}{2}) + x + C.$$

Notemos que $\cos(3x) \sin(2x) = 1/2(\sin(-x) + \sin(5x))$, así

$$\int \cos(3x) \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \left(\int -\sin(x) + \int \sin(5x) dx \right) = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C.$$

m) Realizando el cambio de variable $\sqrt{x} + 1 = u$,

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{(2-u)(u-1)}{u} du = 6 \int \frac{du}{u} - 2 \int \frac{udu}{u} - 4 \int \frac{du}{u} = 6u - u^2 - 4 \log u + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = 6(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} + 1)^2 - 4 \log(\sqrt{x} + 1) + C.$$

Realizando el cambio de variable $1 - \sqrt[4]{x} = t$ y ocupando fracciones parciales,

$$\int \frac{dx}{x(1 - \sqrt[4]{x})} = -4 \int \frac{dt}{(1-t)t} = -4 \int \frac{1}{t} - 4 \int \frac{dt}{1-t} = -4 \log |t| + 4 \log |1-t| + C.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x(1 - \sqrt[4]{x})} = -4 \log |1 - \sqrt[4]{x}| + 4 \log |1 - (1 - \sqrt[4]{x})| + C.$$

Realizando el cambio de variable $\sqrt{x^3 - 1} = t$,

$$\int \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x} dx = \frac{2}{3} \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = \frac{2}{3} \int dt - \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{2t}{3} + \frac{2 \arctan t}{3} + C.$$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x} dx = \frac{2(\sqrt{x^3 - 1})}{3} + \frac{2 \arctan(\sqrt{x^3 - 1})}{3} + C.$$

19. Determine

$$\int x^2 e^{3x} dx.$$

Solución. Usando integración por partes tenemos que

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx.$$

Integrando nuevamente por partes tenemos

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right).$$

Por lo tanto

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C.$$

20. Determine

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Solución. Considere el cambio de variable $u = \sqrt{x}$. Así $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Tenemos entonces que

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \operatorname{sen} u du = -2 \cos u + C = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

21. Demuestre que si $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es diferenciable con derivada continua tal que $f'(x) \neq 0$ entonces la compuesta $g \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Solución. Sea $h = g \circ f$. Como g es integrable, es acotada. Por lo tanto h también es acotada. Como f' es continua y $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces f' tiene signo constante. Supongamos primero que $f' > 0$. Entonces f es estrictamente creciente. Además, existe $m > 0$ tal que $f'(x) \geq m$ para todo $x \in [a, b]$.

Sea $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$. Como g es integrable en $[c, d]$, también lo es en $[\alpha, \beta]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $Q = \{\alpha = y_0 < y_1 < \dots < y_n = \beta\}$ tal que $S(g, Q) - s(g, Q) < m\varepsilon$. Definimos una partición P de $[a, b]$ por $x_i = f^{-1}(y_i)$ con $i = 0, \dots, n$. Entonces $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, la oscilación de $h = g \circ f$ coincide con la oscilación de g en $[y_{i-1}, y_i]$. Además, por el Teorema del Valor Medio,

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \geq m(x_i - x_{i-1}),$$

de donde $x_i - x_{i-1} \leq \frac{y_i - y_{i-1}}{m}$. Por lo tanto,

$$S(h, P) - s(h, P) \leq \frac{1}{m} (S(g, Q) - s(g, Q)) < \varepsilon.$$

Luego, por el Criterio de Darboux, $h = g \circ f$ es integrable en $[a, b]$. Si $f' < 0$, el argumento es análogo, invirtiendo el orden de la partición. Por lo tanto, $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

22. Demuestre que si $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es integrable entonces la compuesta $g \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Solución. Como g es continua y su dominio un intervalo cerrado y acotado existe $K = \sup_{x \in [c, d]} |g(x)| < +\infty$. Además g es uniformemente continua. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}.$$

Por el Teorema 4.4, existe una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \delta^2$. Definimos

$$M_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad m_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M'_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (g \circ f)(x), \quad m'_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (g \circ f)(x).$$

Dividimos el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en dos conjuntos disjuntos: $J_1 := \{i : M_i - m_i < \delta\}$ y su complemento J_2 . Para los elementos de J_1 , se cumple que $M_i - m_i < \delta$ y así por la continuidad uniforme de g ,

$$M'_i - m'_i \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}.$$

Por otra parte, para los elementos de J_2 se satisface que $M_i - m_i \geq \delta$, luego,

$$\delta \sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_2} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < S(f, P) - s(f, P) < \delta^2,$$

y así $\sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) < \delta$. Por último,

$$\begin{aligned} S(g \circ f, \mathcal{P}) - s(g \circ f, \mathcal{P}) &= \sum_{i \in J_1} (M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i \in J_2} (M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i), \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)} \sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) + 2K \sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i), \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)} (b-a) + 2K\delta, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)} (b-a) + \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)} 2K = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{b-a}\right). \end{aligned}$$

Luego por el Teorema 4.4 se tiene el resultado.

23. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{|f(1) - f(0)|}{n}.$$

Este resultado fue probado en 1937 por Sewell y Wals [21].

Solución. Supongamos que f es creciente (el otro caso es análogo). Desarrollando la expresión de la izquierda en la desigualdad,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| dx, \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) = \frac{f(1) - f(0)}{n}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular y la monotonía de f . Notamos que hemos encontrado una cota para la velocidad con la que la suma de Riemann converge a la integral.

24. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz, es decir, tal que existe una constante $M > 0$ tal que si $x, y \in [0, 1]$ entonces $|f(x) - f(y)| < M|x - y|$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene,

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{M}{2n}.$$

Solución. Por la desigualdad triangular y la propiedad Lipschitz tenemos que,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (f(x) - f(k/n)) dx \right| = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(x) - f(k/n)| dx, \\ &\leq M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x \right) dx. \end{aligned}$$

Evaluando obtenemos que,

$$M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x \right) dx = M \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \left(\frac{k^2}{2n^2} - \frac{(k-1)^2}{2n^2} \right) \right) = M \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

25. Demuestre que si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones tales que $f'(x) = -g(x)$ y $g'(x) = f(x)$ entonces $f^2(x) + g^2(x)$ es constante.

Solución. Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ y calculamos

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = -2f(x)g(x) + 2g(x)f(x) = 0.$$

Por lo tanto la función $h(x)$ es constante.

26. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $C > 0$ una constante. Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ un subconjunto (no necesariamente ordenado) de $[a, b]$ tal que $x_0 = a$ y $x_n = b$ y $\sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| < C$. Sea $\delta_n = \max\{|x_i - x_{i-1}| : i \in \{1, \dots, n\}\}$ y considere la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}),$$

donde $\hat{x}_i$ es un punto arbitrario en el intervalo de extremos x_i y x_{i-1} . Demuestre que para cualquier sucesión de sumas S_n tales que $\delta_n \rightarrow 0$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Este resultado fue probado en 1943 por Robbins [16].

Solución. Dado que f es continua en el intervalo compacto $[a, b]$, es uniformemente continua. Definimos el módulo de continuidad dependiente de δ_n como

$$M_n := \sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in [a, b], |u - v| \leq \delta_n\}.$$

Notemos que, por la continuidad uniforme, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ puesto que $\delta_n \rightarrow 0$.

Consideremos el conjunto de puntos $\{x_0, \dots, x_n\}$ ordenado de menor a mayor y sin repeticiones, denotándolo como la partición $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$. En cada subintervalo $[y_{k-1}, y_k]$ escogemos un punto arbitrario $\hat{y}_k$.

Supongamos que el intervalo de extremos x_{i-1} y x_i contiene a los subintervalos generados por los puntos $y_{j-1}, y_j, \dots, y_{j+r}$. Vamos a reemplazar el término de la suma original $f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ por la suma particionada:

$$f(\hat{y}_j)(y_j - y_{j-1}) + \dots + f(\hat{y}_{j+r})(y_{j+r} - y_{j+r-1}),$$

si $x_i > x_{i-1}$, y por el inverso aditivo de esta expresión en caso de que $x_i < x_{i-1}$.

Acotemos el error de este reemplazo. Dado que tanto $\hat{x}_i$ como los correspondientes $\hat{y}_k$ pertenecen al intervalo cerrado delimitado por x_{i-1} y x_i , la distancia entre ellos es a lo sumo δ_n . Por lo tanto, $|f(\hat{x}_i) - f(\hat{y}_k)| \leq M_n$. Usando la desigualdad triangular, la magnitud de la diferencia entre el término original y

su reemplazo es:

$$\left| f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_k f(\hat{y}_k) \Delta y_k \right| \leq \sum_k |f(\hat{x}_i) - f(\hat{y}_k)| |\Delta y_k| \leq M_n |x_i - x_{i-1}|.$$

Sea S'_n la nueva suma construida al hacer todos estos reemplazos para $i = 1, \dots, n$. Al sumar los errores de todos los términos, obtenemos que:

$$|S_n - S'_n| \leq \sum_{i=1}^n M_n |x_i - x_{i-1}| = M_n \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| < CM_n.$$

Ahora analicemos la naturaleza de S'_n . Si reagrupamos todos los términos de la forma $\pm f(\hat{y}_k)(y_k - y_{k-1})$ para un k fijo, la suma algebraica de los coeficientes de $f(\hat{y}_k)$ es exactamente igual a $(y_k - y_{k-1})$. Esto ocurre porque el recorrido total desde $x_0 = a$ hasta $x_n = b$ implica que el número de veces que el subintervalo $[y_{k-1}, y_k]$ es atravesado hacia la derecha excede exactamente en uno al número de veces que es atravesado hacia la izquierda.

Debido a esto, la suma reagrupada colapsa simplemente a:

$$S'_n = \sum_{k=1}^m f(\hat{y}_k)(y_k - y_{k-1}).$$

Es decir, S'_n es una suma de Riemann estándar para f sobre la partición ordenada $\{y_0, \dots, y_m\}$. Puesto que la norma de esta partición es menor o igual a δ_n , y $\delta_n \rightarrow 0$, sabemos por teoría de integración clásica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Finalmente, por la desigualdad triangular:

$$\left| S_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq |S_n - S'_n| + \left| S'_n - \int_a^b f(x) dx \right| < CM_n + \left| S'_n - \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \int_a^b f(x) dx$, concluimos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

27. De una definición precisa de la noción de límite utilizada en la definición de Riemann de integral.

Solución. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Decimos que el número real I es el límite de $\Sigma(f, P^*)$ cuando la norma $|P|$ tiende a cero, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición marcada P^* , tenemos que $|P| < \delta$ implica $|\Sigma(f, P^*) - I| < \varepsilon$. En tal caso $I = \int_a^b f(x) dx$.

28. Demuestre que si $k \in \mathbb{N}$ entonces $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0$.

Solución. Considerando el cambio de variable $y = kx$ obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \int_{-k\pi}^{k\pi} \cos y dy = \frac{1}{k} (\sin k\pi - \sin(-k\pi)) = 0.$$

De la misma forma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{1}{k} \int_{-k\pi}^{k\pi} \sin y dy = \frac{1}{k} (-\cos k\pi + \cos(-k\pi)) = 0.$$

29. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función impar y sea $a > 0$. Determine $\int_{-a}^a f(x)dx$.

Solución. Descomponemos la integral en dos términos y realizamos el cambio de variables $x = -y$ para obtener

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^0 -f(-y)dy = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(y)dy = 0.$$

En la tercera igualdad hemos usado que la función es impar.

30. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables nonegativas tales que la función $t \mapsto \frac{f(t)}{g(t)}$ es integrable y decreciente. Demuestre que la función

$$r \mapsto \frac{\int_a^r f(t)dt}{\int_a^r g(t)dt},$$

es decreciente. El resultado anterior es debido a M. Gromov y puede encontrarse en [3].

Solución. Sea $r \leq R$. La función $r \mapsto \frac{\int_a^r f(t)dt}{\int_a^r g(t)dt}$, es decreciente si y sólo si

$$\int_a^r f(x)dx \int_a^R g(x)dx \geq \int_a^R f(x)dx \int_a^r g(x)dx$$

Notemos que

$$\int_a^R g(x)dx = \int_a^r g(x)dx + \int_r^R g(x)dx, \quad \int_a^R f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^R f(x)dx.$$

Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$\int_a^r f(x)dx \int_a^r g(x)dx + \int_a^r f(x)dx \int_r^R g(x)dx \geq \int_a^r f(x)dx \int_a^r g(x)dx + \int_r^R f(x)dx \int_a^r g(x)dx,$$

que es equivalente a

$$\int_a^r f(x)dx \int_r^R g(x)dx \geq \int_r^R f(x)dx \int_a^r g(x)dx.$$

Por lo tanto basta probar la última desigualdad. Considerando $f/g = h$, y usando que esta función es decreciente,

$$\int_a^r f(x)dx \int_r^R g(x)dx = \int_a^r gh(x)dx \int_r^R g(x)dx \geq h(r) \int_a^r g(x)dx \int_r^R g(x)dx \geq \int_a^r g(x)dx \int_r^R hg(x)dx = \int_a^r g(x)dx \int_r^R f(x)dx.$$

Con lo que se prueba la afirmación.

31. Demuestre que si la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^c f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

Solución. La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua con $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Por el Teorema del Calor Intermedio, existe $c \in [a, b]$ tal que $F(c) = \frac{F(b)}{2}$. Es decir $\int_a^c f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx$.

32. Sea $[x]$ la función parte entera. Demuestre que la transformación de Gauss $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

es tal que $\log |f'(x)|$ es integrable donde está definida.

Solución. Notamos que $f(x) = 1/x - n$, para todo $x \in (1/n + 1, 1/n]$. Por lo tanto la función f es continua y diferenciable en $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. En este conjunto tenemos que $\log |f'(x)| = \log \left| \frac{-1}{x^2} \right| = -2 \log(x)$. Luego basta probar que la función $\log(x)$ es integrable en $[0, 1]$. Calculamos la integral impropia,

$$\int_0^1 \log(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \log(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon - 1 - \varepsilon \log(\varepsilon)).$$

Por L'Hopital,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \log(\varepsilon)}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon^2} = 0,$$

y luego el límite pedido es igual a -1 y así la función $\log x$ es integrable.

33. Sean $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable no negativa y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Demuestre que si $\int_a^b g(x) dx = 0$, entonces $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$.

Solución. Por el Ejercicio 7 se tiene que la función g es igual a cero en todos sus puntos de continuidad. Además por el Ejercicio 6 este conjunto de puntos es denso en $[a, b]$. Por lo tanto existe un conjunto de puntos densos en $[a, b]$ donde la función g se anula. Así, como la función f es acotada, en estos puntos fg es nula. Como tanto f como g son integrables tenemos que fg también lo es. Toda suma inferior de fg es igual a cero, ya que es cero en un conjunto denso. Por lo tanto su integral inferior, y consecuentemente su integral, es igual a cero.

34. Pruebe que si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que f es positiva e integrable, y g continua entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(x_0) \int_a^b f(x) dx.$$

Este resultado es conocido como el Segundo Teorema del Valor Medio para integrales.

Solución. Como g es continua existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $g(x_1) := m \leq g(x) \leq M := g(x_2)$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $x_1 \neq x_2$, de otra forma la función g es constante y por ende el resultado es válido para cualquier $x_0 \in (a, b)$. Luego como f es positiva, para todo $x \in [a, b]$ tenemos que $mf(x) \leq f(x)g(x) \leq Mf(x)$. Por lo tanto

$$m \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b f(x) dx.$$

Luego, existe $y_0 \in [m, M]$ tal que $y_0 \cdot \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx$. Además como g es continua, por el Teorema del Valor Intermedio existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = y_0$. De aquí se obtiene el resultado.

35. Recordemos que si $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$, el coeficiente binomial se define por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Demuestre que

$$\binom{n}{k} = \left((n+1) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \right)^{-1}.$$

Solución. Integrando por partes tenemos que,

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{x^{k+1} (1-x)^{n-k}}{k+1} \Big|_0^1 + \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx = \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx.$$

Integrando por partes nuevamente,

$$\frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx = \frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+1)(k+2)} \int_0^1 x^{k+2} (1-x)^{n-k-2} dx.$$

Iterando hasta que el exponente de x en la integral sea igual a n ,

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \dots = \frac{(n-k) \cdots 1}{(k+1) \cdots (n)} \int_0^1 x^n dx = \frac{(n-k) \cdots 1}{(k+1) \cdots (n+1)}.$$

De aquí se obtiene el resultado.

36. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua entonces

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(g(t)) dt \geq f\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(t) dt\right).$$

Solución. Como $f''(x) \geq 0$, entonces la función f es convexa. Por lo tanto $f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$. Además para todo $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ y $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset [0, 1]$ tales que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$, se tiene que

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n).$$

En el caso de que f es cóncava en vez de convexa se tiene la desigualdad contraria.

Recordamos que una integral puede calcularse usando una suma de Riemann con partición aritmética. Escribiendo la desigualdad pedida en términos de estas sumas de Riemann, tenemos que probar

$$\frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n f(g(x_i)) \geq f\left(\frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a}{n} g(x_i)\right),$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(g(x_i)) \geq f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g(x_i)\right).$$

Por la convexidad de f , tenemos que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(g(x_i)) \geq f(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g(x_i))$. Tomando el límite en ambos lados de la desigualdad y usando la continuidad de f se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(g(x_i)) \geq f(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g(x_i))$, como queríamos probar.

37. Sea $0 < q \leq p$, demuestre que $\log \frac{p}{q} \leq \frac{p-q}{\sqrt{pq}}$.

Solución. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1$ tenemos que,

$$(\log p - \log q)^2 = \left(\int_q^p \frac{1}{x} dx \right)^2 \leq \int_q^p \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx \cdot \int_q^p 1 dx = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) (p - q). \quad (4.3)$$

De aquí se obtiene que $\log \frac{p}{q} \leq \frac{p-q}{\sqrt{pq}}$ como queríamos probar.

38. Determine el menor valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x > 0$ se tiene $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e$.

Solución. Notamos en primer lugar que $\alpha > 0$ ya que $(1 + 1/x)^x$ crece monótonamente a e cuando $x \rightarrow \infty$. Si $\alpha > 0$ satisface la desigualdad pedida entonces, como el logaritmo es creciente,

$$(x + \alpha) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) > 1$$

Haciendo el cambio de variable $1/x = y$ obtenemos

$$\log(1 + y) > \frac{y}{1 + \alpha y}.$$

Sean $A(y) = \log(1 + y)$ y $B(y) = y/(1 + \alpha y)$. Notemos que $A(0) = B(0) = 0$. Afirmamos que $\alpha = 1/2$ es el valor buscado. En efecto, en este caso

$$\frac{1}{1+y} \geq \frac{1}{1+2\alpha y + \alpha^2 y^2} = \frac{1}{1+y+y^2/4} \Leftrightarrow A'(y) \geq B'(y) \implies \int_0^t A'(y) dy \geq \int_0^t B'(y) dy,$$

y por lo tanto $A(t) \geq B(t)$. Por otra parte si $\alpha < 1/2$, entonces $0 < \frac{1-2\alpha}{\alpha^2}$. Sea $y < (1-2\alpha)/\alpha^2$ luego

$$y(\alpha^2 y + 2\alpha - 1) < 0 \Leftrightarrow (y\alpha + 1)^2 < 1 + y \Leftrightarrow \frac{1}{1+y} < \frac{1}{(\alpha y + 1)^2}.$$

Por lo tanto $A'(y) < B'(y)$, de donde $A(y) < B(y)$. Pero entonces no se cumple lo pedido para $0 < y < (1-2\alpha)/\alpha^2$.

39. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que si para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ entonces $f(x) = 0$.

Solución. Decimos que una sucesión de funciones f_n converge uniformemente a f cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Primero probaremos que si una sucesión de funciones integrables converge uniformemente a f , entonces f es integrable. Por la convergencia uniforme para N lo suficientemente grande,

$$f_N(x) - \varepsilon < f(x) < f_N(x) + \varepsilon,$$

si además consideramos una partición P de $[0, 1]$,

$$s(f_N, P) - \varepsilon \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f_N, P) + \varepsilon,$$

y por lo tanto

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f_N, P) - s(f_N, P) + \varepsilon.$$

Como además sabemos que f_N es integrable entonces para P lo suficientemente fina $S(f_N, P) - s(f_N, P) < \varepsilon$ y por lo tanto

$$S(f, P) - s(f, P) < 2\varepsilon,$$

de donde se obtiene que f es integrable. Además es claro que para n grande,

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon.$$

Ahora, por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, un conocido resultado que no demostraremos, toda función continua f es el límite de una sucesión de polinomios que converge uniformemente. Luego, para $\{p_n\}$, una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f , se satisface

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) p_n(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx.$$

Luego por el Ejercicio 7 la función f^2 es cero, ya que f^2 es continua y no negativa. De esta manera concluimos que f es la función constante igual a cero como queríamos.

40. Utilizando la Fórmula de Wallis demuestre que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Solución. Usando el Ejercicio 13 y el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2} \cdot \frac{1}{n} = \pi.$$

Por último, como la función raíz cuadrada es continua obtenemos el límite pedido.

41. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{\frac{x^2}{2}}} \int_0^{3x} e^{t^2} dt.$$

Solución. Este es un límite indeterminado de la forma $0/0$. Utilizando la Regla de L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} x e^{t^2} dt}{1 - e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} e^{t^2} dt + 3x e^{9x^2}}{-x e^{x^2/2}}.$$

Nuevamente este es un límite indeterminado de la forma $0/0$. Utilizando la Regla de L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} e^{t^2} dt + 3x e^{9x^2}}{-x e^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{9x^2} + 3(e^{9x^2} + 18x^2 e^{9x^2})}{-(e^{x^2/2} + x^2 e^{x^2/2})} = -6.$$

Por lo tanto, necesariamente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x^2}{2}}} \int_0^{3x} x e^{t^2} dt = -6$.

42. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada integrable. Demuestre que si $x, c \in [a, b]$ entonces

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt.$$

Solución. Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que $f'(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y posee por primitiva $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$. Restringiendo el dominio a $[c, x]$ se obtiene el resultado, es decir $\int_c^x f'(t) dt = f(x) - f(c)$.

43. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g, h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ funciones diferenciables. Defina la función $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt.$$

Demuestre que la función ϕ es diferenciable y $\phi'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$.

Solución. Notamos que si $r \in (a, b)$ entonces

$$\phi(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = \int_r^{g(x)} f(t) dt - \int_r^{h(x)} f(t) dt.$$

Luego ϕ es la suma de composiciones de funciones diferenciables, y por lo tanto diferenciable. En efecto, las funciones g y h son diferenciables por hipótesis y como f es continua su integral es diferenciable por el Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $F(x) = \int_r^x f(t)dt$, entonces

$$\phi(x) = F'(g(x))f'(x) - F'(h(x))h'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

44. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, demuestre que

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x)dx.$$

Solución. Integrando por partes obtenemos,

$$\begin{aligned} \int \cos^n(x)dx &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + \int (n-1)\cos^{n-2}(x)\sin^2(x)dx \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + \int (n-1)\cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))dx \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + \int (n-1)\cos^{n-2}(x)dx - \int (n-1)\cos^n(x)dx \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos finalmente

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x)dx.$$

45. Para utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo es necesario que la derivada de una función sea integrable. El siguiente resultado debido a J. van de Lune [15] caracteriza las funciones con dicha propiedad. Demuestre que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces la derivada f' es integrable en $[a, b]$ si y sólo si existe una función integrable $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \phi(t)dt.$$

Construya un ejemplo donde ϕ no satisface el Teorema de Darboux.

Solución. Si f' es integrable, basta tomar $\phi = f'$. Entonces, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + \int_a^x \phi(t)dt.$$

Recíprocamente, supongamos que existe ϕ integrable tal que $f(x) = f(a) + \int_a^x \phi(t)dt$. Sea $F(x) := \int_a^x \phi(t)dt$. Entonces $f = f(a) + F$, luego $f' = F'$. Tomemos una partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b\}$. En cada intervalo $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, definimos $m_j = \inf_{I_j} \phi$ y $M_j = \sup_{I_j} \phi$. Si $u, v \in I_j$, con $u \neq v$, entonces

$$m_j \leq \frac{F(v) - F(u)}{v - u} = \frac{1}{v - u} \int_u^v \phi(t)dt \leq M_j.$$

Haciendo $v \rightarrow u$, obtenemos $m_j \leq F'(u) = f'(u) \leq M_j$. Por tanto, en cada I_j ,

$$\inf_{I_j} \phi \leq \inf_{I_j} f' \leq \sup_{I_j} f' \leq \sup_{I_j} \phi.$$

Luego $S(f', \mathcal{P}) - s(f', \mathcal{P}) \leq S(\phi, \mathcal{P}) - s(\phi, \mathcal{P})$. Como ϕ es integrable, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathcal{P}$ tal que $S(\phi, \mathcal{P}) - s(\phi, \mathcal{P}) < \varepsilon$. Entonces $S(f', \mathcal{P}) - s(f', \mathcal{P}) < \varepsilon$. Por definición, f' es integrable en $[a, b]$.

Mostraremos ahora el ejemplo pedido. Definimos $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi(x) = 1$ si $x = 0$, y $\phi(x) = 0$ si $0 < x \leq 1$. Entonces ϕ es integrable de Riemann, pues sólo es discontinua en un pun-

to. Además, $\int_0^x \phi(t) dt = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Tomemos $f(x) = 0$. Entonces f es diferenciable y $f(x) = f(0) + \int_0^x \phi(t) dt$. Sin embargo, ϕ no satisface el Teorema de Darboux. En efecto, $\phi(0) = 1$, y $\phi(1) = 0$, pero ϕ nunca toma el valor $\frac{1}{2}$. Por tanto, ϕ no tiene la propiedad del valor intermedio.

46. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea D el conjunto de puntos de discontinuidad de f y L el conjunto de puntos donde existe el límite por la izquierda. Demuestre que $D \cap L$ es un conjunto numerable. Este resultado es debido a Levine [12] y permite probar la equivalencia entre distintas caracterizaciones de integrabilidad.

Solución. Definimos la oscilación de f en un punto x como

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\sup_{|x-a| < \delta} f(x) - \inf_{|x-a| < \delta} f(x) \right).$$

Además definimos $D_n = \{x : \omega(f, x) > 1/n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de un punto de discontinuidad tenemos que el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f satisface que $D = \cup D_n$. Por lo tanto $D \cap L = \cup_{n=1}^{\infty} (D_n \cap L)$, y así, basta probar que $D_n \cap L$ es numerable para concluir.

Supongamos que $x_0 \in D_n \cap L$. Como $x_0 \in L$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0^-)| < 1/2n$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, donde x_0^- corresponde al límite por la izquierda de f en x_0 . De esta forma,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0^-)| + |f(y) - f(x_0^-)| < \frac{1}{n} \text{ para todo } x, y \in (x_0 - \delta, x_0),$$

así todos los elementos de $(x_0 - \delta, x_0)$ satisfacen que $\omega(f, x) \leq 1/n$ o sea, no pertenecen a D_n . De esta forma todos los puntos de $D_n \cap L$ son el extremo derecho de un intervalo abierto que no tienen puntos de $D_n \cap L$. Como estos son intervalos abiertos disjuntos y claramente numerables, el conjunto $D_n \cap L$ también lo es.

47. Demuestre que

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx^2} \right) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx.$$

Solución. Para $h(x) = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}$, calculamos $h'(x) = nxe^{-nx^2}$. Por Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, como $\lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx^2} = 0$, obtenemos que $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx^2} dx = 0$.

48. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con derivada continua. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 f(x) dx \right).$$

Solución. Comenzaremos reescribiendo la expresión del límite mediante integración por partes. Notemos que para cada subintervalo $[k/n, (k+1)/n]$ se cumple que

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n} \right) f'(x) dx = \left[\left(x - \frac{k}{n} \right) f(x) \right]_{k/n}^{(k+1)/n} - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx.$$

Evaluando los límites de integración, obtenemos

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx.$$

Sumando desde $k = 0$ hasta $n - 1$, reconstruimos la suma de Riemann y la integral de la expresión original:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx.$$

Definamos entonces

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x) dx.$$

El problema se reduce a calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n$.

En lo que sigue, asumiremos primero que la función f es de clase C^2 en $[0, 1]$ y luego usaremos un argumento de densidad para extender el resultado a funciones C^1 .

Para $f \in C^2$, integramos nuevamente por partes cada término de A_n , eligiendo $u = f'(x)$ y $dv = (x - k/n)dx$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f'(x) \right]_{k/n}^{(k+1)/n} - \frac{1}{2} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''(x) dx \right).$$

Evaluando, nos queda

$$A_n = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''(x) dx.$$

Multiplicando por n , obtenemos la expresión para nA_n :

$$nA_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''(x) dx.$$

El primer término es exactamente $\frac{1}{2}$ multiplicado por una suma de Riemann para la función continua f' , por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f'\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Para el segundo término, sea $M = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$. Acotamos la integral:

$$\left| \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''(x) dx \right| \leq \frac{nM}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 dx = \frac{nM}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3n^3} = \frac{M}{6n}.$$

Como $\frac{M}{6n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos que para toda función $f \in C^2([0, 1])$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n = \frac{f(1) - f(0)}{2}$.

Finalmente, extendemos el resultado a funciones $C^1([0, 1])$. Notemos que $T_n(f) = nA_n$ define una sucesión de funcionales lineales sobre el espacio de Banach $C^1([0, 1])$. Además, si $f \in C^1([0, 1])$, podemos acotar:

$$|T_n(f)| \leq n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) |f'(x)| dx \leq n \|f'\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} = \frac{\|f'\|_\infty}{2} \leq \frac{\|f\|_{C^1}}{2}.$$

Esto prueba que los funcionales T_n están uniformemente acotados (su norma operadora está acotada por $1/2$). Como el espacio $C^2([0, 1])$ es denso en $C^1([0, 1])$ respecto a la norma $\|\cdot\|_{C^1}$, y la sucesión de operadores lineales uniformemente acotados T_n converge puntualmente en este subespacio denso hacia el funcional $L(f) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$, un teorema clásico de análisis funcional asegura que la sucesión T_n debe converger para toda $f \in C^1([0, 1])$ al mismo límite.

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n = \frac{f(1)-f(0)}{2}$ para toda función diferenciable con derivada continua.

49. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada tal que la función $f^2(x) := f(x)f(x)$ es integrable. Determine si es que podemos concluir que la función f es integrable.

Solución. Consideremos el siguiente contraejemplo. Sea f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ -1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Para toda partición $\mathcal{P}$, tenemos que $S(f, \mathcal{P}) = 1$ y $s(f, \mathcal{P}) = -1$, luego f no es integrable. Sin embargo $f^2(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$ la cual claramente es integrable.

50. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable tal que su segunda derivada sea continua. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \int_0^1 f(x) dx - n \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right).$$

Solución. Para agrupar la integral y la suma de manera adecuada, definimos los intervalos $I_k = [k/n, (2k+1)/2n]$ y $J_k = [(2k-1)/2n, k/n]$. Notamos que los puntos medios donde se evalúa la suma corresponden a las fronteras de estos intervalos: $m_k = \frac{2k-1}{2n}$.

Consideremos la partición de $[0, 1]$ dada por:

$$[0, 1] = I_0 \cup J_1 \cup I_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_{n-1} \cup I_{n-1} \cup J_n.$$

Integrando por partes en cada tipo de intervalo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{I_k} \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x) dx &= \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \int_{I_k} f(x) dx, \\ \int_{J_k} \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x) dx &= \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) - \int_{J_k} f(x) dx. \end{aligned}$$

Al sumar sobre toda la partición, los términos evaluados se agrupan exactamente para formar la suma de Riemann en los puntos medios, resultando en:

$$- \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right).$$

Definimos la unión $T_k = J_k \cup I_k = [(2k-1)/2n, (2k+1)/2n]$. La partición se reescribe como $[0, 1] = I_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{n-1} \cup J_n$. Volvemos a integrar por partes en T_k :

$$\int_{T_k} \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x) dx = \frac{1}{8n^2} \left[f'\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] - \frac{1}{2} \int_{T_k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''(x) dx.$$

Para los intervalos en los extremos:

$$\int_{I_0} x f'(x) dx = \frac{1}{8n^2} f'\left(\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \int_{I_0} x^2 f''(x) dx,$$

$$\int_{J_n} (x-1)f'(x)dx = -\frac{1}{8n^2}f'\left(\frac{2n-1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\int_{J_n} (x-1)^2 f''(x)dx.$$

Al sumar todas estas expresiones, los términos de frontera que involucran a f' forman una suma telescópica que se anula perfectamente. Nos queda que la diferencia original es exactamente $-A_n$, por lo que el límite buscado (considerando el signo y el factor n^2) se reduce a calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 A_n)$, donde:

$$A_n = \frac{1}{2}\int_{I_0} x^2 f''(x)dx + \frac{1}{2}\int_{J_n} (x-1)^2 f''(x)dx + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\int_{T_k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''(x)dx.$$

Asumiremos temporalmente que la función f es de clase C^3 . Integrando por partes una tercera vez:

$$\frac{1}{2}\int_{T_k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''(x)dx = \frac{1}{48n^3} \left[f''\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + f''\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] - \frac{1}{6}\int_{T_k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^3 f'''(x)dx.$$

Haciendo lo análogo para I_0 y J_n y sumando, los términos en los bordes interiores se suman, reconstruyendo una suma de Riemann para f'' :

$$A_n = \frac{1}{24n^3} \sum_{k=1}^n f''\left(\frac{2k-1}{2n}\right) - S(n),$$

donde $S(n)$ agrupa las integrales con $f'''(x)$. Dado que $f \in C^3$, $|f'''|$ está acotada por una constante M . Calculamos la cota:

$$|S(n)| \leq \frac{M}{6} \left(\int_{I_0} x^3 dx + \int_{J_n} |x-1|^3 dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{T_k} \left|x - \frac{k}{n}\right|^3 dx \right) = \frac{M}{6} \cdot n \cdot \frac{2}{4(2n)^4} = \frac{M}{192n^3}.$$

Al multiplicar por n^2 , el término de error $n^2 S(n)$ está acotado por $\mathcal{O}(1/n)$ y tiende a cero. El límite se reduce entonces a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{24n} \sum_{k=1}^n f''\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = \frac{1}{24} \int_0^1 f''(x)dx = \frac{f'(1) - f'(0)}{24}.$$

Finalmente, extendemos este resultado a funciones de clase C^2 mediante un argumento de densidad en espacios de Banach. Definimos los funcionales lineales $L_n(f) = n^2 A_n$ sobre $C^2([0, 1])$. Para cualquier $f \in C^2([0, 1])$, acotamos directamente usando la definición original de A_n :

$$|L_n(f)| = n^2 |A_n| \leq \frac{n^2 \|f''\|_\infty}{2} \left(\int_{I_0} x^2 dx + \int_{J_n} (x-1)^2 dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{T_k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 dx \right).$$

Evaluando las integrales, la suma de los volúmenes de los dominios cuadráticos es exactamente $\frac{1}{12n^2}$. Por lo tanto:

$$|L_n(f)| \leq \frac{n^2 \|f''\|_\infty}{2} \left(\frac{1}{12n^2} \right) = \frac{\|f''\|_\infty}{24} \leq \frac{\|f\|_{C^2}}{24}.$$

Esto demuestra que la sucesión de operadores funcionales L_n está uniformemente acotada. Como $C^3([0, 1])$ es un subespacio denso en $C^2([0, 1])$ y L_n converge puntualmente en dicho subespacio hacia el funcional continuo $L(f) = \frac{f'(1) - f'(0)}{24}$, se concluye que $L_n(f)$ debe converger a este mismo límite para toda función $f \in C^2([0, 1])$.

51. Demuestre que

$$\int_0^\pi x e^{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi e^{\sin x} dx.$$

Solución. En general, consideramos f tal que $xf(\sin x)$ sea integrable. Haciendo el cambio $u = \pi - x$, $\frac{du}{dx} = -1$, obtenemos

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = -\int_\pi^0 (\pi - u)f(\sin(\pi - u))du = \int_0^\pi \pi f(\sin u)du - \int_0^\pi uf(\sin u)du$$

Luego, $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin u)du$. El ejercicio se obtiene aplicando lo anterior a $f(x) = e^x$.

52. Sea $f(x) = |x|$ y $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$. Determine una fórmula para F y si es que se tiene que $F' = f$.

Solución. Para $x < 0$ se tiene $F(x) = \int_{-1}^x -t dt = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$. Por otra parte si $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2} + \int_0^x t dt = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

Además observamos que para x positivo, $F'(x) = x$, y para x negativo, $F'(x) = -x$. Por último para $x = 0$ se tiene que $F'(x) = 0$ ya que

$$F'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{2} = 0,$$

y similarmente se obtiene que $F'_-(0) = 0$. Así, se tiene $F'(0) = 0$ y de esta manera se concluye que $F' = f$.

53. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La *variación total* de f se define por $V(f) := \sup \{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \}$ donde el supremo se toma sobre el conjunto de todas las particiones finitas $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$.

- a) Si f posee derivada continua utilice en Teorema Fundamental del Cálculo para probar que $V(f) \leq \int_a^b |f'(x)|dx$.
b) Utilice el Teorema del Valor Medio para probar la otra desigualdad y concluir que $V(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$.

Solución.

- a) Por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que para toda partición $P = \{x_k\}_{k=0}^n$ de $[a, b]$,

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(x)|dx = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Tomando supremo sobre todas las particiones, se tiene $V(f) \leq \int_a^b |f'(x)|dx$.

- b) Como f' es continua, entonces $|f'|$ también lo es, por lo tanto es integrable. Sea $P = \{x_k\}_{k=0}^n$ una partición de $[a, b]$. Por el Teorema del Valor Medio, para cada $1 \leq k \leq n$, existe $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$\sum_{k=1}^n |f'(x_k^*)|(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V(f).$$

Ahora, haciendo $|P| \rightarrow 0$ se obtiene que $\int_a^b |f'(x)|dx \leq V(f)$.

54. Sea

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right).$$

- a) Demuestre que si $n \neq m$ entonces $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$.
b) Demuestre que $\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.
c) Demuestre que si $m < n$ entonces $\int_{-1}^1 x^m P_n(x)dx = 0$.

Solución.

a) Sin pérdida de generalidad asumamos $n > m$. Integrando por partes

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^{n-1} \right) \frac{d^m}{dx^m} \left((x^2 - 1)^m \right) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^{n-1} \right) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left((x^2 - 1)^m \right) dx.$$

Pero como $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^{n-1} \right)$, tiene factores $(x^2 - 1)$ en todos sus términos, entonces esta expresión se anula en -1 y 1 . De esta forma integrando por partes $m+1$ veces,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = (-1)^{m+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-(m+1)}}{dx^{n-(m+1)}} \left((x^2 - 1)^n \right) \frac{d^{m+(m+1)}}{dx^{m+(m+1)}} \left((x^2 - 1)^m \right) dx = 0.$$

Donde esta expresión es cero porque derivamos $2m+1$ veces un polinomio de grado $2m$.

b) Integrando de la misma forma n veces obtenemos

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx.$$

Realizando el cambio de variable $x = \cos u$,

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_0^\pi \sin^{2n+1} u du.$$

Y como al integrar por partes,

$$\int_0^\pi \sin^k x dx = -\sin^{k-1} x \cos x \Big|_0^\pi + (k-1) \int_0^\pi \cos^2 x \sin^{k-2} x dx = (k-1) \left(\int_0^\pi \sin^{k-2} x dx - \int_0^\pi \sin^k x dx \right).$$

Entonces como $\frac{k}{k-1} \int_0^\pi \sin^k x dx = \int_0^\pi \sin^{k-2} x dx$,

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} (-1)^n \int_0^\pi \sin^{2n+1} u du = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

c) Integrando por partes,

$$\int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right) dx = x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^n \right) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 m x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^n \right) dx.$$

Pero como $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2 - 1)^n \right)$, tiene factores $(x^2 - 1)$ en todos sus términos, entonces esta expresión se anula en -1 y 1 . Por ende, integrando por partes m veces,

$$\int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right) dx = (-1)^m m! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left((x^2 - 1)^n \right) dx = 0$$

55. Demuestre que para todo $a > 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$.

Solución. Primero calculamos $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t}$. Este límite corresponde a la derivada de $f(x) = a^x$ en $x = 0$. Luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = \log a.$$

Por lo tanto el límite pedido se puede calcular como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \log a.$$

56. Calcule los siguientes límites

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx.$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{\sin(nx)}{x} dx.$$

Solución. Primero resolvemos a). Como $1 \leq 1+x$ para $0 \leq x \leq 1$ y además la función integrada es positiva,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Luego, por el Teorema del Sandwich, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

Ahora resolvemos b). Derivando $F(x) = -(1-x^2)^{n+1}/2(n+1)$, obtenemos $F'(x) = x(1-x^2)^n$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$n \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2(n+1)}.$$

Tomando el límite a esta última expresión tenemos que el resultado es $1/2$.

Finalmente resolvemos c). Haciendo el cambio de variable $y = nx$ y ocupando el Ejemplo 4.82 de la integral de Dirichlet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{\sin(nx)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

57. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $F(x) := \int_0^{x^3} f(y) dy$. Demuestre que $F'(x) = 3x^2 f(x^3)$.

Solución. Basta notar que $F(x) = (g \circ h)(x)$ donde $g(x) = \int_0^x f(y) dy$ y $h(x) = x^3$. Luego por la regla de la cadena $F'(x) = g'(h(x))h'(x) = 3x^2 f(x^3)$.

58. (La integral de Riemann–Stieljes.) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Dada una partición $\mathcal{P} := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ definimos la *Suma superior RS* por

$$S_{rs}(\mathcal{P}, f) := \sum_{i=1}^n M_i(h(t_i) - h(t_{i-1})),$$

donde $M_i := \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Análogamente definimos la *Suma inferior RS* por

$$s_{rs}(\mathcal{P}, f) := \sum_{i=1}^n m_i(h(t_i) - h(t_{i-1})),$$

donde $m_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

- a) Demuestre que si $\mathcal{P}, \mathcal{R}$ son dos particiones de $[a, b]$ entonces $s_{rs}(\mathcal{R}, f) \leq S_{rs}(\mathcal{P}, f)$.

La *integral inferior RS* de f se define por

$$\int_a^b f(x)dh(x) := \sup \{s_{rs}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } [a, b]\},$$

y la *integral superior RS* de f por

$$\overline{\int_a^b f(x)dh(x)} := \inf \{S_{rs}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } [a, b]\}.$$

Diremos que la función f es integrable en el sentido de Riemann-Stieljes si

$$\int_a^b f(x)dh(x) = \overline{\int_a^b f(x)dh(x)} := \int_a^b f(x)dh(x).$$

- b) Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces f es integrable en el sentido de Riemann-Stieljes.
- c) Demuestre que si $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones crecientes y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces

$$\int_a^b f(x)d(h_1 + h_2)(x) = \int_a^b f(x)dh_1(x) + \int_a^b f(x)dh_2(x).$$

- d) Suponga que la función creciente $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable y su derivada es una función continua. Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces,

$$\int_a^b f(x)dh(x) = \int_a^b f(x)h'(x)dx.$$

Solución. Primero probaremos a). De la definición es claro que para toda partición $\mathcal{P}$ se tiene que

$$s_{rs}(\mathcal{P}, f) \leq S_{rs}(\mathcal{P}, f),$$

ya que $M_i \geq m_i$. Por otra parte si $\mathcal{Q}$ es una partición más fina que $\mathcal{P}$ entonces $s_{rs}(\mathcal{P}, f) \leq s_{rs}(\mathcal{Q}, f)$ y $S_{rs}(\mathcal{Q}, f) \leq S_{rs}(\mathcal{P}, f)$. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ un partición de $[a, b]$. Como $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ tenemos que la partición $\mathcal{Q}$ posee al menos un punto más que $\mathcal{P}$. Es decir, existe $r \in [a, b]$ con $t_{i-1} < r < t_i$, tal que $r \in \mathcal{Q}$. Supongamos en primer lugar que $\mathcal{Q} = \{t_0, t_1, \dots, t_i, r, t_{i+1}, \dots, t_n\}$. Sean

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}, \quad m'_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, r]\}, \quad m''_i := \inf\{f(x) : x \in [r, t_i]\}.$$

Notemos que $m_i \leq m'_i$ y $m_i \leq m''_i$. Como $h(t_i) - h(t_{i-1}) = (h(t_i) - h(r)) + (h(r) - h(t_{i-1}))$, tenemos que

$$\begin{aligned} s_{rs}(f, \mathcal{Q}) - s_{rs}(f, \mathcal{P}) &= m''(h(t_i) - h(r)) + m'(h(r) - h(t_{i-1})) - m_i(h(t_i) - h(t_{i-1})) \\ &= (m'' - m_i)(h(t_i) - h(r)) + (m' - m_i)(h(r) - h(t_{i-1})) \geq 0. \end{aligned}$$

Luego $s_{rs}(f, \mathcal{P}) \leq s_{rs}(f, \mathcal{Q})$. El caso general claramente se deduce de la observación anterior. En efecto, si la partición $\mathcal{Q}$ contiene m puntos más que la partición $\mathcal{P}$, basta repetir m veces el argumento anterior, agregándole a $\mathcal{P}$ cada vez un nuevo punto. La desigualdad $S_{rs}(f, \mathcal{Q}) \leq S_{rs}(f, \mathcal{P})$ se deduce de manera análoga.

Luego si consideramos la partición $\mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ tenemos que

$$s_{rs}(\mathcal{R}, f) \leq s_{rs}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}, f) \leq S_{rs}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}, f) \leq S_{rs}(\mathcal{P}, f).$$

Ahora probaremos b). Sea $\varepsilon > 0$, como la función es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{h(b) - h(a)}.$$

Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ cuyos intervalos tengan largo menor que δ . Entonces si $f(x_i) = m_i$, $f(y_i) = M_i$ tenemos que

$$w_i = f(y_i) - f(x_i) < \frac{\varepsilon}{h(b) - h(a)}.$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^n w_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{h(b) - h(a)} \sum_{i=1}^n (h(t_i) - h(t_{i-1})) = \varepsilon.$$

De donde obtenemos que la función f es integrable.

Ahora probaremos c). Denotamos $s_{rs}(f, P_{h_1+h_2})$ a la suma inferior para la función creciente h correspondiente. Basta ver que como

$$\sum_{i=1}^n m_i((h_1 + h_2)(t_i) - (h_1 + h_2)(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n m_i(h_1(t_i) - h_1(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n m_i(h_2(t_i) - h_2(t_{i-1})),$$

entonces $s_{rs}(f, P_{h_1+h_2}) = s_{rs}(f, P_{h_1}) + s_{rs}(f, P_{h_2})$ y luego,

$$\int_a^b f(x) d(h_1 + h_2)(x) = \int_a^b f(x) dh_1(x) + \int_a^b f(x) dh_2(x).$$

Como f es continua, debido a b), se concluye que

$$\int_a^b f(x) d(h_1 + h_2)(x) = \int_a^b f(x) dh_1(x) + \int_a^b f(x) dh_2(x).$$

Finalmente probaremos d). Dada una partición $\mathcal{P} := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ tenemos que por el Teorema del Valor Medio existe $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$h'(c_i)(t_i - t_{i-1}) = h(t_i) - h(t_{i-1}).$$

Por lo tanto la

$$s_{rs}(\mathcal{P}, f) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(h(t_i) - h(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(c_i)h'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq S_{rs}(\mathcal{P}, f).$$

De la definición de integral de Riemann utilizando particiones marcadas tenemos el resultado.

59. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

Utilice lo anterior, además del resultado análogo para $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$, para calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin^2(nx) dx.$$

Solución. La demostración de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0$, es análoga a la dada en el libro para seno. Para calcular el segundo límite ocupamos la fórmula de $\cos(2x)$ para obtener lo siguiente

$$\int_a^b f(x) \sin^2(nx) dx = \int_a^b f(x) \left(\frac{1 - \cos(2nx)}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) \cos(2nx) dx.$$

Luego, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(2nx) dx = 0$, por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

60. Sea

$$f(x) := \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt.$$

a) Pruebe que si $x > 0$ entonces $|f(x)| < 1/x$.

b) Pruebe que

$$2xf(x) = \cos(x^2) - \cos((x+1)^2) + r(x),$$

donde $|r(x)| < c/x$ y c es una constante.

Solución. a) Si $t > 0$, entonces $\frac{d}{dt} \cos(t^2) = -2t \sin(t^2)$, por lo que $\sin(t^2) = -\frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \cos(t^2)$. Así, integrando por partes,

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt = - \int_x^{x+1} \frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \cos(t^2) dt = \left[-\frac{\cos(t^2)}{2t} \right]_x^{x+1} - \int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{2t^2} dt.$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)} - \int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{2t^2} dt.$$

Tomando valor absoluto, $|f(x)| \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)} + \int_x^{x+1} \frac{|\cos(t^2)|}{2t^2} dt$. Como $|\cos(t^2)| \leq 1$, y además no es idénticamente igual a 1 en ningún intervalo, $\int_x^{x+1} \frac{|\cos(t^2)|}{2t^2} dt < \int_x^{x+1} \frac{1}{2t^2} dt$. Luego

$$|f(x)| < \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)} + \int_x^{x+1} \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, $|f(x)| < \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

b) Ocupando la expresión anterior para $f(x)$ y multiplicando por $2x$,

$$2xf(x) = \cos(x^2) - \frac{x}{x+1} \cos((x+1)^2) - x \int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt.$$

Ahora escribimos $-\frac{x}{x+1} \cos((x+1)^2) = -\cos((x+1)^2) + \frac{1}{x+1} \cos((x+1)^2)$. Por lo tanto, $2xf(x) = \cos(x^2) - \cos((x+1)^2) + r(x)$, donde

$$r(x) = \frac{\cos((x+1)^2)}{x+1} - x \int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt.$$

Ahora estimamos $r(x)$. Como $|\cos(t^2)| \leq 1$,

$$|r(x)| \leq \frac{1}{x+1} + x \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{x+1} < \frac{2}{x}.$$

Luego, tomando $c = 2$, se obtiene $|r(x)| < \frac{c}{x}$.

61. Demuestre que la función $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) := \int_0^\pi \frac{\sin(xt)}{t} dt,$$

es continua.

Solución. Primero observamos que por el Teorema del Valor Medio $|\sin(xt) - \sin(yt)| \leq |xt - yt|$ para todo x, y, t . Luego, podemos acotar

$$|T(x) - T(y)| = \left| \int_0^\pi \frac{\sin(xt) - \sin(yt)}{t} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|\sin(xt) - \sin(yt)|}{t} dt \leq \int_0^\pi \frac{|xt - yt|}{t} dt = \pi|x - y|.$$

Por lo tanto la función T es Lipschitz, y en particular continua.

62. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2(x) dx = 1$. Demuestre que $\int_a^b xf(x)f'(x) dx = -\frac{1}{2}$.

Solución. Integrando por partes obtenemos lo siguiente,

$$\int_a^b xf(x)f'(x) dx = \frac{1}{2}(bf^2(b) - af^2(a)) - \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx = -\frac{1}{2}$$

63. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}} \right)^n = e^e.$$

Solución. Primero, recordamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$,

$$e - \varepsilon < (1 + 1/n)^n < e + \varepsilon.$$

Como $f(x) = (1 + x/n)^n$ cumple que $f'(x) = (1 + x/n)^{n-1} > 0$ para todo $x > 0$, entonces tenemos que

$$\left(1 + \frac{e - \varepsilon}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{(1 + 1/n)^n}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{e + \varepsilon}{n} \right)^n,$$

para todo $n > n_0$. Por último tomando el límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ se concluye por el Teorema del Sandwich que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}} \right)^n = e^e.$$

64. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demuestre que si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables entonces

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Solución. Primero recordamos la Desigualdad de Young. Sean $p, q > 1$ y $a, b > 0$ tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En efecto, como log es una función cóncava, sea $t = 1/p$ y $1 - t = 1/q$ entonces

$$\log(ab) = t \log(a^p) + (1-t) \log(b^q) \leq \log(ta^p + (1-t)b^q) = \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

Usando la función exponencial se obtiene la desigualdad. Ahora procedemos a probar la Desigualdad de Hölder. Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ y $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

Procedemos a usar la notación $\|x\|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$. Por la desigualdad de Young,

$$\frac{|\sum_{k=1}^n x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por lo tanto $|\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Procedemos a probar la desigualdad pedida. Consideramos la partición P_n , dada por $x_0 < \dots < x_n$ que divide a $[a, b]$ en n intervalos de igual largo y con $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para cada k . Por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n (fg)(\bar{x}_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n g(\bar{x}_k)^q \right)^{1/q}.$$

Luego, multiplicando por $b-a/n$ y usando $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} (fg)(\bar{x}_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_k)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} g(\bar{x}_k)^q \right)^{1/q}.$$

Como f, g, fg son integrables, entonces cuando n tiende a infinito obtenemos el resultado.

65. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva, y sea M su valor máximo. Demuestre que

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx}.$$

Solución. Por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (a, b)$ con

$$\sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx} = \sqrt[n]{(b-a)f(c)^n} = \sqrt[n]{b-a} f(c).$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx} = f(c) \leq M.$$

Por otra parte, si $0 < J < M$, entonces existe x_0 tal que $f(x_0) > J$ y, más aún, existe un intervalo I que contiene a x_0 y $f(x) > J$ para todo $x \in I$. Así,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_I (f(x))^n dx} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{l(I)J^n} = J.$$

Como $J < M$ es arbitrario, el límite inferior del lado izquierdo es mayor o igual a M y se tiene

$$M \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx} \leq M,$$

que es el resultado deseado.

66. Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + (k - \alpha)\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

donde $\alpha = 0$ o bien $\alpha = 1/2$ (dependiendo si escogemos la definición de N. Wiener o la de K. Menger). Demuestre que si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función característica de los números racionales el límite existe (aún cuando g no es Riemann integrable). Ver [19].

Solución. En el límite anterior aparece una suma de Riemann, la que envía la norma de la partición a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Como sabemos que f es integrable, entonces es claro que el límite corresponde a la integral pedida. Para la función característica de los racionales en $[0, 1]$ tenemos que $a = 0$ y $b = 1$. Además como estamos considerando a α racional, entonces todos los números de la forma

$$\left(a + (k - \alpha)\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n},$$

son racionales y por ende en tales puntos la función vale siempre 0. Por esto si definieramos las funciones integrables como las que hacen que este límite converja, entonces la función característica de los racionales en $[0, 1]$ sería integrable.

67. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Definimos

$$K_n = \frac{1}{3 \log 3} + \cdots + \frac{1}{n \log n}.$$

Demuestre que el siguiente límite existe $\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n - \log \log n)$.

Solución. Sea $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ una función decreciente en $[3, \infty)$. Definimos $A_n := K_n - \int_3^n \frac{dx}{x \log x}$. Como

$$\int_3^n \frac{dx}{x \log x} = \log \log n - \log \log 3,$$

basta probar que (A_n) converge. Para $k \geq 3$, al ser f decreciente, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$. Luego

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0,$$

así que (A_n) es decreciente. Además, $\int_3^n f(x) dx \leq \sum_{k=3}^{n-1} f(k)$, por lo tanto

$$A_n = \sum_{k=3}^n f(k) - \int_3^n f(x) dx \geq f(n) > 0.$$

Así, (A_n) es decreciente y acotada inferiormente, luego converge. Como $K_n - \log \log n = A_n - \log \log 3$, también converge. Por consiguiente, el límite existe.

68. El siguiente resultado puede encontrarse en [5]. Demuestre que existe una función $f(x, t)$ definida para $t \geq 0$ tal que $\int_0^\infty f(x, t) dt$ converge uniformemente en $x \geq 0$, además $\int_0^\infty |f(x, t)| dt$ converge en $x \geq 0$, pero la convergencia de la última integral no es uniforme.

Solución. Iniciamos probando un lema previo. Sea h una función positiva y decreciente en $[0, \infty)$ y sea g la función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k \leq x < 2k+1 \text{ para } k = 0, 1, \dots \\ -1 & \text{si } 2k-1 \leq x < 2k \text{ para } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Suponemos que $[a, b] \subset [0, \infty)$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b h(t)g(t)dt = h(a) \int_a^c g(t)dt.$$

Demostración del lema: Si $h(a) = 0$, como h es positiva y decreciente, entonces $h(t) = 0$ en todo $[a, b]$ y el resultado es trivial. Asumimos $h(a) > 0$. Sea

$$A = \frac{\int_a^b h(t)g(t)dt}{h(a)} \quad \text{y} \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Como g es integrable en todo intervalo $[a, b]$, G es continua. Al ser G continua, alcanza su máximo y mínimo; así, basta probar que

$$\min_{x \in [a, b]} G(x) \leq A \leq \max_{x \in [a, b]} G(x),$$

para obtener lo pedido, esto debido al Teorema del Valor Intermedio aplicado a la función G . Diremos que los intervalos de la forma $[2k, 2k+1)$ son pares y el resto impares. Es fácil notar que si $a = b$ el resultado es trivial, por ende asumiremos que $a \neq b$.

Consideremos el caso cuando a está en un intervalo par. Definimos a^* como el menor natural que es mayor a a y $d = a^* - a$. Por la definición de g y por ser h decreciente,

$$-(1-d)h(a^*) < \int_a^b h(t)g(t)dt < dh(a).$$

Además, como $-h(a^*) \geq -h(a)$, entonces

$$(-1+d)h(a) < \int_a^b h(t)g(t)dt < dh(a),$$

y así $-1+d < A < d$. Si G alcanza los valores $(d-1)$ y d en el intervalo $[a, b]$, entonces queda probado. Ahora consideramos los casos cuando $\max_{x \in [a, b]} G(x) < d$ o $\min_{x \in [a, b]} G(x) > -1+d$.

Sea $b^* = a^* + 1$. Si $b \geq b^*$, entonces G alcanza tanto a $d-1$ como a d en b^* y a^* respectivamente. Por esto consideramos el caso cuando $b \in (a, b^*)$. Asumimos que $\max_{x \in [a, b]} G(x) = D$ con $0 < D < d$; en este caso $b < a^*$, ya que $G(a^*) = d$ y para $b \geq a^*$, $D = d$ (a la derecha de a^* , g es negativa). Vemos que $b - a = D$ y esto implica que $\int_a^b h(t)g(t)dt < Dh(a)$, o sea $A < D$.

Ahora si $\min_{x \in [a, b]} G(x) = \bar{D}$ con $d-1 < \bar{D} < 0$, entonces $b \in (a^*, b^*)$ y si $\bar{a} = a^* + d$, se tiene que $b - \bar{a} = -\bar{D}$. Por lo tanto $\int_a^b h(t)g(t)dt > \bar{D}h(a)$ y así $A > \bar{D}$.

Si se alcanza $d-1$, pero $D < d$, entonces $d-1 \leq A < D$. De la misma manera, si se alcanzaba d y $\bar{D} > d-1$, entonces $\bar{D} < A \leq d$. Por último, si $D < d$ y $\bar{D} > d-1$, entonces $\bar{D} < A < D$. Por lo tanto, siempre se cumple que

$$\min_{x \in [a, b]} G(x) \leq A \leq \max_{x \in [a, b]} G(x),$$

de donde concluimos. Para el caso en que a está en un intervalo impar, consideramos $-g$ en vez de g y análogamente obtenemos el mismo resultado.

Continuación de la solución principal: Definimos la función $f(x, t) = \frac{x}{x^2+t^2}g(t)$. Fijado $x > 0$, la función $h(t) = \frac{x}{x^2+t^2}$ es claramente positiva y decreciente respecto a t para $t \geq 0$. Para $0 \leq a < b$, usando el lema anterior,

$$\int_a^b \frac{x}{x^2+t^2}g(t)dt = \frac{x}{x^2+a^2} \int_a^c g(t)dt$$

(Para $x = 0$ la integral es trivialmente 0). Por la definición de g se sabe que $|\int_a^c g(t)dt| \leq 1$ y así

$$\left| \int_a^b \frac{x}{x^2+t^2}g(t)dt \right| \leq \frac{x}{x^2+a^2}.$$

Como para todo $x \geq 0$ se cumple que $\frac{x}{x^2+a^2} \leq \frac{1}{2a}$, entonces para a suficientemente grande (independiente de x),

$$\left| \int_a^b \frac{x}{x^2+t^2}g(t)dt \right| \leq \varepsilon$$

y así, por el Criterio de Cauchy, $\int_0^\infty f(x, t)dt$ converge uniformemente en $x \geq 0$.

Por otra parte, definimos la integral absoluta:

$$F(x) := \int_0^\infty \left| \frac{x}{x^2+t^2}g(t) \right| dt = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$

Evaluando, obtenemos $F(0) = 0$, y para $x > 0$,

$$F(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{t}{x}\right) \Big|_0^M = \frac{\pi}{2}.$$

Esto significa que el límite $F(x)$ no es continuo en $x = 0$. Como las funciones integrando son continuas en x pero la función límite no lo es, concluimos que la convergencia de la última integral no es uniforme.

69. Determine la convergencia de

$$\int_0^\infty f(x)dx.$$

donde la función f se define para $x \in [n-1, n)$ como $f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Solución. Sea $k \in (0, \infty)$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 \leq k \leq n$. Como la función f es constante en el intervalo $[n-1, n)$, la integral $I_k = \int_1^k f(x)dx$ posee un valor entre $I_{n-1} = \int_1^{n-1} f(x)dx$ y $I_n = \int_1^n f(x)dx$ (si n es par entonces $I_n \leq I_k \leq I_{n-1}$, si n es impar entonces $I_{n-1} \leq I_k \leq I_n$). Denotemos por S la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Para todo entero positivo n tenemos que

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx = 1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Además, como $\{I_n\}_n$ converge, de hecho es condicionalmente convergente, entonces se puede probar que $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k$ también converge. Por lo tanto la integral pedida converge. Sin embargo $\int_0^N |f(x)|dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$. Por lo tanto $\int_0^\infty |f(x)|dx$ diverge.

70. Sea $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(x) = a_n \quad \text{si } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right],$$

donde $(a_n)_n$ es una sucesión real (no necesariamente acotada). Demuestre que si las siguientes sumas de Riemann

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n),$$

convergen cuando $n \rightarrow \infty$ entonces la integral (impropia) $\int_0^1 f(x)dx$ converge al mismo límite, (ver [2, 18] para la demostración y la relación de este resultado con el Teorema de los Números Primos).

Solución. Como una gran parte de los teoremas que dicen algo acerca de la densidad de los números primos, esta demostración recae en una estimación para una suma que involucra la función de Möbius. Recuerde que $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ es tal que $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$ cuando n es producto de r primos distintos, y cero en cualquier otro caso. El teorema que necesitamos es el siguiente.

Teorema de Landau:

$$\sum_{k \leq N} \frac{\mu(k)}{k} = o\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

En particular, de este teorema se tiene que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \leq N} \frac{\mu(k)}{k} = 0$. A lo largo de la demostración también necesitaremos usar que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \leq N} \frac{\mu(k) \log(k)}{k} = -1$; su demostración es más bien elemental (usando fórmulas de inversión como la expuesta en el párrafo siguiente) y se deja al lector.

Sea

$$g(x) := f(1/x) \quad \text{y} \quad G(x) := \sum_{k \leq x} g(x/k) = \sum_{k \leq x} f(k/x).$$

Por la segunda fórmula de inversión de Möbius,

$$g(t) = \sum_{k \leq t} \mu(k) G(t/k),$$

donde μ corresponde a la función de Möbius. Vemos que esto se cumple ya que

$$\sum_{s \leq t} G(t/s) \mu(s) = \sum_{s \leq t} \sum_{k \leq t/s} g(t/(sk)) \mu(s) = \sum_{h \leq t} \sum_{s|h} g(t/h) \mu(s),$$

donde en la última igualdad definimos $h := st$ y observamos que la única relación entre h y s es que $s|h$. Finalmente la suma queda

$$\sum_{h \leq t} \sum_{s|h} g(t/h) \mu(s) = \sum_{h \leq t} g(t/h) \sum_{s|h} \mu(s) = g(t),$$

ya que $\sum_{s|h} \mu(s) = 0$ para $h \neq 1$.

Considerando $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \int_{\varepsilon}^1 g(1/x) dx = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{g(t)}{t^2} dt = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{1}{t^2} \sum_{k \leq t} \mu(k) G(t/k) dt = \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\mu(k) G(t/k)}{t^2} dt,$$

donde, como el intervalo de integración está acotado por $1/\varepsilon$, la suma también lo está. Note que $G(x) = G([x])$, ya que $f(k/x) = f(k/[x])$, entonces

$$\frac{G(x)}{x} = \frac{1}{[x]} \sum_{k \leq [x]} f\left(\frac{k}{[x]}\right) \frac{[x]}{x},$$

y así

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n).$$

De esta forma, llamando $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$, obtenemos $G(x) = Lx + x\phi(x)$ para una función ϕ tal que $\phi(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Manipulando la expresión previamente obtenida,

$$\int_{\varepsilon}^1 f(x)dx = \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k)}{k} \int_1^{1/\varepsilon} \frac{k}{t} G(t/k) \frac{1}{t} dt = \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k)}{k} \int_k^{1/\varepsilon} \frac{k}{t} G(t/k) \frac{1}{t} dt = \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k)}{k} \int_k^{1/\varepsilon} (L + \phi(t/k)) \frac{1}{t} dt,$$

la segunda igualdad es porque $G(t/k) = G([t/k]) = 0$ para $t < k$. Definiendo $S(1/\varepsilon) := \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k)}{k} \int_k^{1/\varepsilon} \frac{dt}{t}$ nos queda la expresión:

$$\int_{\varepsilon}^1 f(x)dx = LS(1/\varepsilon) + \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k)}{k} \int_k^{1/\varepsilon} \phi(t/k) \frac{1}{t} dt.$$

Usando que $\int_k^{1/\varepsilon} \frac{dt}{t} = \log(1/\varepsilon) - \log(k)$ obtenemos

$$S\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k) \log(1/\varepsilon)}{k} - \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k) \log(k)}{k} = o\left(\frac{1}{\log(1/\varepsilon)}\right) \log(1/\varepsilon) - \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k) \log(k)}{k}$$

Por último, cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (recordar las fórmulas presentadas al comienzo de la solución)

$$\int_{0^+}^1 f(x)dx = L + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{k \leq 1/\varepsilon} \frac{\mu(k)}{k} \int_k^{1/\varepsilon} \phi(t/k) \frac{1}{t} dt.$$

Sea $A_N := \sum_{k \leq N} \frac{\mu(k)}{k} \int_k^N \phi(t/k) \frac{1}{t} dt$. Finalmente, observamos que $A_N = o(S(N))$ y por tanto el límite de la derecha es cero. Se concluye que nuestra integral impropia vale L .

Por último, destacamos que tal como aparece en los artículos citados, este resultado puede ser usado en la demostración del Teorema de los Números Primos. Para dar una idea de esto enunciaré un teorema que se prueba de manera similar al argumento seguido arriba.

Teorema: Sea f una función real integrable en $[\delta, 1]$ para todo $\delta > 0$. Si se tiene que $\varepsilon \sum_{k=1}^{[1/\varepsilon]} f(k\varepsilon)$ converge cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, entonces la integral impropia $\int_0^1 f(t)dt$ converge al mismo valor.

Consideremos la función $\psi(x) = \sum_{p^n \leq x} \log(p)$ donde la suma corre sobre los primos p y n es un exponente natural. Se puede probar que el Teorema de los Números Primos equivale a probar el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$. En el intento de probar este límite podemos definir $f(x) := \psi(1/x) - 1/x$ y verificar usando el criterio presentado arriba como teorema que $\int_0^1 f(t)dt$ converge; esto a su vez nos dice que $\psi(1/x) - 1/x = o(1/x)$ cuando $x \rightarrow 0^+$, que es justamente lo buscado. La idea de usar la función ψ para probar estos teoremas de distribución asintótica de los números primos viene ya de los trabajos de Hadamard y de La Vallée-Poussin, quienes por métodos analíticos (más duros que los que hicimos nosotros, donde además asumimos el Teorema de Landau, altamente no trivial) prueban el teorema alrededor de 1896. Ciertamente, en la actualidad se conoce una amplia gama de demostraciones; estas pueden invo-

lucrar la función zeta de Riemann (donde los métodos son ciertamente con análisis complejo), y otras involucran análisis armónico.

71. Demuestre que si $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

Solución. Considere las funciones $g, h : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0, \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Luego

$$f = g - h, \quad |f| = g + h, \quad g = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad h = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

En particular las funciones $|f|, g, h$ son continuas y por lo tanto integrables en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $[a, \infty)$. Como g y h son funciones positivas tales que $0 \leq g(x) \leq |f(x)|$, $0 \leq h(x) \leq |f(x)|$, se sigue por el Criterio de Comparación que $\int_a^\infty g(x)dx$ y $\int_a^\infty h(x)dx$ convergen. Así para todo $N > a$,

$$\int_a^N f(x)dx = \int_a^N g(x)dx - \int_a^N h(x)dx.$$

Tomando límite con N tendiendo a infinito obtenemos que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge y que

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx - \int_a^\infty h(x)dx.$$

72. Demuestre que $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge.

Solución. Como $|\cos x| \leq 1$ tenemos que $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Además recordamos que la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge. Luego, por el Criterio de Comparación $\int_a^\infty \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ también converge. Finalmente $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge por el Ejercicio 72.

73. Estudie la convergencia de $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$.

Solución. Sea $I = \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$. Para $k \geq 1$, si $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, entonces $x \leq (k+1)\pi$, y por tanto $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$. Luego

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx.$$

Como $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = 2$, se obtiene $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$. Por lo tanto,

$$\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{(k+1)\pi} = +\infty.$$

Así, $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge.

74. Sean $n, m \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que la siguiente integral converge $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$.

Solución. Notemos que,

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx.$$

En primer lugar estudiaremos la convergencia de $\int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$. Si $m-1 \geq 0$ entonces la integral converge. Por otra parte si $m \in (0, 1)$ tenemos que

$$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \leq \int_0^{1/2} x^{m-1} dx.$$

y $\int_0^{1/2} x^{m-1} dx < \infty$ de donde se tiene la convergencia. De la misma manera, si $n-1 \geq 0$ entonces la integral $\int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ converge. Por otra parte si $n \in (0, 1)$ tenemos que

$$\int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \leq \int_{1/2}^1 (1-x)^{n-1} dx$$

y $\int_{1/2}^1 (1-x)^{n-1} dx < \infty$. De donde se deduce la convergencia de $\int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$.

75. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Estudie la convergencia de la integral $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$.

Solución. Sea $I_n = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ con $n \in \mathbb{Z}$. Estudiamos la integral separándola en

$$I_n = \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Primero, en $[1, \infty)$, la exponencial domina a cualquier potencia. Esto se puede probar usando el Criterio de Comparación para $n \leq 0$ y L'Hopital para $n > 0$. Por lo tanto, $\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ converge para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ahora estudiamos el comportamiento cerca de 0. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$, se tiene que $x^{n-1} e^{-x}$ es comparable a x^{n-1} cuando $x \rightarrow 0^+$. Por el Criterio de Comparación el límite $\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx$ converge si y solo si $\int_0^1 x^{n-1} dx$ converge. Pero $\int_0^1 x^{n-1} dx$ converge si y solo si $n-1 > -1$, es decir, si y solo si $n > 0$. Como $n \in \mathbb{Z}$, esto equivale a $n \geq 1$. Por lo tanto, $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ converge si y solo si $n \geq 1$, y diverge si $n \leq 0$.

76. Demuestre que $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$.

Solución. Sea $I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$. Haciendo el cambio de variable $u = \pi/2 - x$ obtenemos

$$\int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin u du = I.$$

Sumando ambas expresiones,

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \log \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \log 2.$$

Además, por el cambio de variable $u = 2x$,

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \log(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} \log(\sin u) du, \quad (4.4)$$

donde la segunda igualdad se sigue por simetría. Por lo tanto, $2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2$. De aquí se obtiene lo pedido.

77. Demuestre que

$$\int_0^{\pi} x \log(\sin x) dx = -\frac{\pi^2}{2} \log 2.$$

Solución. Sea $I = \int_0^{\pi} x \log(\sin x) dx$. Por el cambio de variable $x \mapsto \pi - x$, y usando que $\sin(\pi - x) = \sin x$, obtenemos $I = \int_0^{\pi} (\pi - x) \log(\sin x) dx$. Sumando ambas expresiones,

$$2I = \int_0^{\pi} \pi \log(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} \log(\sin x) dx.$$

Po el ejercicio anterior $\int_0^{\pi} \log(\sin x) dx = -\pi \log 2$, luego $2I = -\pi^2 \log 2$. Por lo tanto $I = -\frac{\pi^2}{2} \log 2$.

78. Suponga que $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones positivas y acotadas tales que existe $k \in \mathbb{R}^+$ para el cual

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Pruebe que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge si y sólo si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge.

Solución. Suponemos primero que $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge. Por definición de límite, existe $M > a > 0$ tal que si $x \geq M$ entonces $f(x)/g(x) < 2k$. Por lo tanto

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \leq 2k \int_M^{+\infty} g(x) dx \leq 2k \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Luego si $\int_M^{\infty} g(x) dx$ converge entonces $\int_M^{\infty} f(x) dx$ también converge. Además $\int_a^M f(x) dx$ es un número positivo, luego $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ también converge.

Ahora suponemos que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge. Por definición de límite, existe $N > 0$ tal que para $x \geq N > a$ se tiene $f(x)/g(x) > k/2$. Por lo tanto

$$k \int_N^{\infty} g(x) dx \leq 2 \int_N^{\infty} f(x) dx \leq 2 \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Luego se concluye argumentando como en el caso anterior.

79. Demuestre que si $f(x)$ es una función no negativa y no creciente tal que $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$. Este resultado fue obtenido por Norris en [14].

Solución. Como $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge tenemos por el Criterio de Cauchy que para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $u, v > M$, entonces $|\int_u^v f(x) dx| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{u \rightarrow \infty} |\int_u^{2u} f(x) dx| = 0$. Como f es no creciente, para $u > 0$, tenemos que $0 \leq u f(2u) \leq \int_u^{2u} f(x) dx$. Luego $\lim_{u \rightarrow \infty} u f(2u) = 0$. Reemplazando $x = 2u$,

$$0 = \lim_{u \rightarrow \infty} u f(2u) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x).$$

Con esto concluimos que $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$. Bajo las hipótesis del ejercicio tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (como la función es monótona, caso contrario la integral no sería convergente). Lo que hemos probado es que la velocidad con que la función converge a cero en infinito es más rápida que la velocidad con que la identidad crece a infinito.

80. La transformada de Laplace de una función $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se define como función de s dada por

$$\mathcal{L}(F)(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx,$$

para los valores de s en los cuales la integral converge. Esta transformación es análoga a las series de potencias y se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales.

a) Demuestre que si $s > a$ entonces $\mathcal{L}(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$ y $\mathcal{L}(\cos(ax)) = \frac{s}{s^2+a^2}$.

b) Sea $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Suponiendo que $\lim_{M \rightarrow +\infty} e^{-sM} F(M) = 0$ para todo s , demuestre que

$$\mathcal{L}(F'(x)) = s\mathcal{L}(F(x)) - F(0).$$

c) Sea $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Suponiendo que $\lim_{M \rightarrow +\infty} e^{-sM} F(M) = 0$ para todo s , demuestre que

$$\mathcal{L}(F''(x)) = s^2 \mathcal{L}(F(x)) - sF(0) - F'(0).$$

d) Aplicando la transformada de Laplace, determine F de modo tal que $F''(x) + F(x) = x$ donde $F(0) = 0$ y $F'(0) = 2$. Ayuda: $\mathcal{L}(x) = 1/s^2$ y $\mathcal{L}(\sin x) = 1/(s^2 + 1)$.

Solución:

a) Como $s - a > 0$, tenemos

$$\mathcal{L}(e^{ax}) = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-(s-a)M}}{s-a} = \frac{1}{s-a}.$$

Por otra parte

$$\mathcal{L}(\cos(ax)) = \int_0^\infty e^{-sx} \cos(ax) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-sx}(a \sin(ax) - s \cos(ax))}{s^2 + a^2} \right|_0^M = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

b) Integrando por partes, haciendo $u(x) = F(x)$ y $dv(x) = e^{-sx}$, obtenemos

$$\mathcal{L}(F(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{-F(x)e^{-sx}}{s} \right)_{x=0}^{x=M} - \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{-s} F'(x) dx = -\frac{F(0)}{-s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}(F'(x)).$$

De donde se tiene el resultado.

c) Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F''(x)) &= s\mathcal{L}(F'(x)) - F'(0) = s(s\mathcal{L}(F(x)) - F(0)) - F'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(F(x)) - sF(0) - F'(0). \end{aligned}$$

d) Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación tenemos que $\mathcal{L}(F''(x) + F(x)) = \mathcal{L}(x) = 1/s^2$. Por otra parte, como

$$\mathcal{L}(F''(x) + F(x)) = \mathcal{L}(F''(x)) + \mathcal{L}(F(x)),$$

se tiene

$$s^2 \mathcal{L}(F(x)) - sF(0) - F'(0) + \mathcal{L}(F(x)) = \frac{1}{s^2}.$$

Así

$$\mathcal{L}(F(x)) = \frac{2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Como $\mathcal{L}(x) = 1/s^2$ y $\mathcal{L}(\sin x) = 1/(s^2 + 1)$, se tiene que $\mathcal{L}(x + \sin x) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1}$. Por lo tanto una solución de la ecuación viene dada por $F(x) = x + \sin x$.

81. El siguiente resultado aparece en [10]. Nos entrega condiciones para que el estudio de las integrales impropias tenga propiedades similares al estudio de series. Suponga que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ si y sólo si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \sup_{t_1, t_2} \{|f(t_1) - f(t_2)| : t_1, t_2 \geq t_0, |t_1 - t_2| \leq \delta\} = 0.$$

Solución. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que $|f(t)| \leq \varepsilon/2$ para $t \geq t_0$. Así para $t_1, t_2 \geq t_0$ se cumple que

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq |f(t_1)| + |f(t_2)| \leq \varepsilon.$$

Con esto basta considerar t_0 suficientemente grande para que se satisfaga lo pedido.

Suponemos ahora que el límite del enunciado es cero. Por contradicción asumimos que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq 0$, y luego existe $b > 0$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendiendo a infinito tal que $\forall n \in \mathbb{N} f(x_n) \leq -b$ o bien $f(x_n) \geq b$. Consideraremos solo el caso en que $f(x_n) \geq b$, el otro es análogo. Por hipótesis existe δ y t_0 de modo que $|f(t_1) - f(t_2)| \leq b/2$ para $t_1, t_2 \geq t_0$ y $|t_1 - t_2| \leq \delta$. Además como $\int_a^\infty f(t)dt$ converge, por el Criterio de Cauchy existe $R \geq t_0$ de modo que para $P > Q > R$,

$$\left| \int_Q^P f(t)dt \right| < b\delta.$$

Luego considerando $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > R + \delta$, entonces $f(t) \geq b/2$ para $x_N - \delta \leq t \leq x_N + \delta$, ya que $a_N - \delta > R > t_0$. Además como $x_N - \delta > R$ podemos ocupar el Criterio de Cauchy como ya se mencionó. Sin embargo,

$$\left| \int_{a_N - \delta}^{a_N + \delta} f(t)dt \right| \geq (b/2)(2\delta) = b\delta,$$

lo que contradice el Criterio de Cauchy, con esto obtenemos la deseada contradicción.

82. Demuestre que si $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ si y sólo si f es uniformemente continua. Ver [10].

Solución. Supongamos primero que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $M > a$ tal que si $x \geq M$, entonces $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como f es continua en el compacto $[a, M+1]$, es uniformemente continua en $[a, M+1]$. Por tanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x, y \in [a, M+1]$ y $|x - y| < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$. Si $x, y \in [a, \infty)$ y $|x - y| < \delta$, entonces, o bien ambos están en $[a, M+1]$, y ya tenemos la desigualdad, o bien ambos son mayores que M . En este último caso,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \varepsilon.$$

Así, f es uniformemente continua.

Recíprocamente, supongamos que f es uniformemente continua. Queremos probar que $f(x) \rightarrow 0$. Supongamos que no. Entonces existen $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión $x_n \rightarrow \infty$ tales que $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0$. Por continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Luego, para todo $x \in [x_n, x_n + \frac{\delta}{2}]$, se tiene $|f(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$ y $f(x)$ conserva el mismo signo que $f(x_n)$. Por tanto,

$$\left| \int_{x_n}^{x_n + \delta/2} f(x)dx \right| > \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\varepsilon_0 \delta}{4}.$$

Pero como la integral impropia converge, por el Criterio de Cauchy, las integrales sobre intervalos suficientemente alejados deben ser arbitrariamente pequeñas. En particular, para n grande,

$$\left| \int_{x_n}^{x_n + \delta/2} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon_0 \delta}{4},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

83. Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, una función dos veces diferenciable. Demuestre que si f y f'' son acotadas entonces también lo es f' (ver [10]).

Solución. Como f y f'' son acotadas, existen constantes $A, B \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq A$ y $|f''(x)| \leq B$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fijemos $x \in \mathbb{R}$. Por el Teorema de Taylor, existe $\xi \in (x, x+1)$ tal que $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi)$. Despejando $f'(x)$ y estimando obtenemos

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{h} + \frac{h}{2}|f''(\xi)|.$$

Usando las cotas de f y f'' , se tiene que $|f'(x)| \leq \frac{2A}{h} + \frac{Bh}{2}$. Si $B > 0$, elegimos $h = 2\sqrt{A/B}$. Entonces $|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB}$. Como esta cota no depende de x , concluimos que f' es acotada. Notamos que si $B = 0$, entonces $f'' = 0$, luego f es una función afín, es decir $f(x) = ax + b$. Como f es acotada en $\mathbb{R}$, necesariamente $a = 0$. Por lo tanto $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y en particular f' es acotada. En conclusión, si f y f'' son acotadas, entonces f' también es acotada.

84. Demuestre que si $\int_a^\infty f(x)^2 dx$ y $\int_a^\infty f''(x)^2 dx$ convergen entonces también converge $\int_a^\infty f'(x)^2 dx$. Además $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ (ver [10]).

Solución. Integrando por partes tenemos que

$$\int_a^x f(t)f''(t)dt = f(x)f'(x) - f(a)f'(a) - \int_a^x (f'(t))^2 dt.$$

Como $f^2 + f''^2 \geq 2|ff''|$, la integral del lado izquierdo converge, basta integrar en esta última desigualdad para verlo. Luego tenemos dos posibilidades o bien $\int_a^\infty f'^2$ converge, o tiende a infinito monótonamente. Suponiendo que la integral tiende a infinito, entonces $f \cdot f'$ también lo hace por la primera igualdad. Pero note que esto es imposible ya que si fuera así como $f^2 + f''^2 \geq 2|ff''|$, entonces f^2 o f''^2 se va a infinito y por ende la integral de tal función sería divergente y esto nos llevaría a una contradicción. Así obtenemos que la integral pedida converge y además $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)f'(x)$ también converge.

Por último como $\lim_{x \rightarrow \infty} 2f(x)f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2)'(x)$ converge, existe t_0 tal que para $t \geq t_0$ $|(f^2)'(t)|$ es acotada. Además la función $(f^2)'$ continua en el compacto $[a, t_0]$ alcanza su máximo. Así la función es acotada en $[a, \infty)$. Luego tal como vimos en el ejercicio anterior, por el Teorema del Valor Medio f^2 es uniformemente continua ya que su derivada es acotada. Finalmente, por el Ejercicio 83 se tiene que como f^2 es uniformemente continua y su integral converge, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f^2(x) = 0$ y por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ como deseábamos probar.

85. El siguiente resultado es debido a Sard [17]. Sea $\mathcal{P} = \{t_1, t_2, \dots\}$ una partición de $[a, \infty)$ con puntos marcados $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$. Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y no creciente tal que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Entonces la suma de Riemann generalizada $\sum_{i=1}^\infty f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)$ converge a $\int_a^\infty f(x)dx$ cuando la norma de la partición tiende a cero.

Solución. Para demostrar esto, probaremos primero una afirmación más general. Sea f una función acotada e integrable en $[a, t]$ para todo $t \geq a$. Denotemos $M_j = \sup_{x \in [a+j-1, a+j]} |f(x)|$. Supongamos que $\sum_{j=1}^\infty M_j < \infty$. Demostraremos que en este caso la integral impropia $I = \int_a^\infty f(x)dx$ existe, y que el límite de las sumas de Riemann sobre particiones marcadas converge a I .

Sea $\mathcal{P}$ una partición marcada con norma $\Delta = \sup(t_{i+1} - t_i)$. Asumiremos sin pérdida de generalidad que $\Delta \leq 1$. Agruparemos los términos de la suma de Riemann y de la integral en bloques de longitud 1. Definimos

$$I_j = \int_{a+j-1}^{a+j} f(x)dx, \quad u_j(\mathcal{P}) = \sum_{i \in U_j} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$

donde $U_j = \{i : a+j-1 \leq t_i < a+j\}$. De este modo, la integral se escribe como $I = \sum_{j=1}^{\infty} I_j$ y la suma de Riemann como $S(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\mathcal{P})$. Como $|I_j| \leq M_j$ y la serie de los M_j converge, la integral impropia I está bien definida y es absolutamente convergente.

Para acotar $u_j(\mathcal{P})$, notemos que si $i \in U_j$, entonces $t_i \in [a+j-1, a+j)$. Como la norma de la partición es $\Delta \leq 1$, el extremo derecho satisface $t_{i+1} \leq a+j+\Delta \leq a+j+1$. En consecuencia, el punto marcado t_i^* pertenece necesariamente al intervalo $[a+j-1, a+j+1]$, lo que implica que $|f(t_i^*)| \leq \max(M_j, M_{j+1}) \leq M_j + M_{j+1}$. Por otro lado, la suma de las longitudes de los subintervalos en U_j no excede la longitud del intervalo que cubren, la cual es a lo más $1 + \Delta \leq 2$. Por lo tanto,

$$|u_j(\mathcal{P})| \leq \sum_{i \in U_j} |f(t_i^*)|(t_{i+1} - t_i) \leq 2(M_j + M_{j+1}).$$

Dado que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} 2(M_j + M_{j+1})$ converge por hipótesis y es independiente de la partición $\mathcal{P}$, el Test M de Weierstrass nos asegura que la serie de funciones (en el espacio de las particiones) $S(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\mathcal{P})$ converge uniformemente respecto a $\mathcal{P}$.

Además, por la integrabilidad de f en intervalos finitos, sabemos que para cada j fijo,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_j(\mathcal{P}) = \int_{a+j-1}^{a+j} f(x)dx = I_j.$$

Gracias a la convergencia uniforme garantizada por el Test M, es lícito intercambiar el límite ($\Delta \rightarrow 0$) con la suma infinita:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S(\mathcal{P}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_j(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{\infty} I_j = I.$$

Esto concluye la demostración del lema general.

Para resolver el problema específico, observamos que si f es no negativa, no creciente y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces por el test de la integral para series, la suma $\sum_{j=1}^{\infty} f(a+j-1)$ converge. Puesto que f es no creciente, su supremo en el intervalo $[a+j-1, a+j]$ se alcanza en el extremo izquierdo, es decir, $M_j = f(a+j-1)$. En consecuencia, $\sum_{j=1}^{\infty} M_j < \infty$, por lo que se satisfacen todas las hipótesis de nuestro lema general, quedando así probado el resultado de Sard.

Referencias

1. Aigner, Martin and Ziegler, Gunter M. *Proofs from The Book*. Fourth edition. Springer-Verlag, Berlin, 2010, viii+274 pp.
2. Byrnes, J. S., Giroux, A. and Shisha, O. *Riemann sums and improper integrals of step functions related to the prime number theorem*. *J. Approx. Theory* **40** (1984), no. 2, 180–192.
3. Chavel, Isaac. *Riemannian geometry. A modern introduction*. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 98. Cambridge University Press, Cambridge, 2006, xvi+471 pp.
4. Erdős, P. *A theorem on the Riemann integral*. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*. **55** = *Indagationes Math.* **14** (1952), 142–144.
5. Hallenbeck, David J. and Tkaczyńska, Katarzyna. *The absolute and uniform convergence of infinite improper integrals*. *The American Mathematical Monthly* **95** (1988), no. 2, 124–126.
6. Hartig, Donald. *L'Hopital's rule via integration*. *The American Mathematical Monthly* **98** (1991), no. 2, 156–157.
7. Haruki, Hiroshi. *Classroom Notes: On a Well-Known Improper Integral*. *The American Mathematical Monthly* **74** (1967), no. 7, 846–848.
8. Hirst, K. E. *A Property of Riemann-Integrable Functions*. *The American Mathematical Monthly* **75** (1968), no. 2, 168–169.
9. Van Kampen, E. R. *The Fundamental Theorem for Riemann Integrals*. *Amer. J. Math.* **58** (1936), no. 4, 847–850.
10. Kelman, R. B. and Rivlin, T. J. *Classroom Notes: Conditions for Integrand of an Improper Integral to be Bounded or Tend to Zero*. *The American Mathematical Monthly* **67** (1960), no. 10, 1019–1022.

11. Kozakiewicz, Wacław. *Mathematical Notes: A Simple Evaluation of an Improper Integral*. *The American Mathematical Monthly* **58** (1951), no. 3, 181–182.
12. Levine, Leo M. *On a Necessary and Sufficient Condition for Riemann Integrability*. *The American Mathematical Monthly* **84** (1977), no. 3, 205.
13. Metzler, R. C. *On Riemann Integrability*. *The American Mathematical Monthly* **78** (1971), no. 10, 1129–1131.
14. Norris, M. J. *Some necessary conditions for convergence of infinite series and improper integrals*. *The American Mathematical Monthly* **60** (1953), 96–97.
15. van de Lune, J. *A Note on the Fundamental Theorem for Riemann-Integrals*. *The American Mathematical Monthly* **82** (1975), no. 9, 918–919.
16. Robbins, H. E. *A Note on the Riemann Integral*. *The American Mathematical Monthly* **50** (1943), no. 10, 617–618.
17. Sard, Arthur. *Discussions and Notes: A Theorem on Improper Integrals*. *The American Mathematical Monthly* **49** (1942), no. 8, 536–537.
18. Selvaraj, S. *A note on Riemann sums and improper integrals related to the prime number theorem*. *J. Approx. Theory* **66** (1991), no. 1, 106–108.
19. Sklar, Abe. *Classroom Notes: On the Definition of the Riemann Integral*. *The American Mathematical Monthly* **67** (1960), no. 9, 897–900.
20. Thomas, G. *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, 1960.
21. Wals, J. L. and Sewell, W. E. *Note on Degree of Approximation to an Integral by Riemann Sums*. *The American Mathematical Monthly* **44** (1937), no. 3.

